16-3302-01

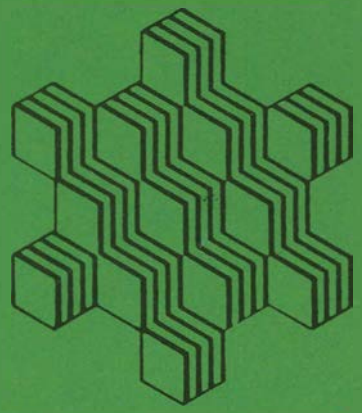
GUIDE PÉDAGOGIQUE

• Secondaire

MATHÉMATIQUE

SECOND CYCLE

FASCICULE A
L'ARITHMÉTIQUE ET L'ALGÈBRE



Québec

MATHÉMATIQUE

SECOND CYCLE

FASCICULE A

L'ARITHMÉTIQUE ET L'ALGÈBRE

Direction générale du développement pédagogique
Direction de la formation générale

**Approuvé par les Comités protestant et catholique
du Conseil supérieur de l'éducation
les 4 et 17, 18 novembre 1983.**

**© Gouvernement du Québec
Ministère de l'Éducation, 1984**

ISBN 2-550-06330-9

Dépôt légal - premier trimestre 1984

AUTEURS*

M. Jean Matte	Agent de développement pédagogique, responsable de la mathématique au secondaire, Direction générale du développement pédagogique, ministère de l'Education.
M. Jean-Berchmans Veilleux	Agent de développement pédagogique, Direction générale du développement pédagogique, ministère de l'Education.

COMITE CONSULTATIF*

M. Bernard Blain	Agent de développement pédagogique, Direction générale du développement pédagogique, ministère de l'Education.
Mme Noëlange Boisclair	Coordonnateur, Coordination provinciale en mathématique au collégial.
M. Ray Clarke	Représentant de la Q.A.M.T. (Quebec Association of Mathematics Teachers).
M. Claude Janvier	Professeur, Université du Québec à Montréal.
M. Raymond Lalonde	Représentant de l'A.M.Q. (Association mathématique du Québec).
M. Jean Matte	Agent de développement pédagogique, responsable de la mathématique au secondaire, Direction générale du développement pédagogique, ministère de l'Education.
M. Jean-Marcel Mius d'Entremont	Coordonnateur de l'enseignement général, C.S.R. de Tilly.
M. Jean-Berchmans Veilleux	Agent de développement pédagogique, Direction générale du développement pédagogique, ministère de l'Education.

* Les personnes dont les noms suivent exercaient les fonctions mentionnées pendant l'année scolaire 1981-1982.

M. Michel Warisse	Représentant du G.R.M.S. (Groupe des responsables en mathématique au secondaire).

COMITE DE PRODUCTION *

M. Michel Arcouet	Enseignant, C.S.R. Meilleur.
Mme Emilienne Boisvert	Enseignante, C.S.R. Jérôme-Le Royer.
M. Marcel Brisebois	Enseignant, C.E.C.M. (Commission des écoles catholiques de Montréal).
M. Michael Cassidy	Conseiller pédagogique, C.S. Baldwin-Cartier.
M. Raymond Lalonde	Enseignant, C.E.C.M. (Commission des écoles catholiques de Montréal).
M. Jean Matte	Agent de développement pédagogique, responsable de la mathématique au secondaire, Direction générale du développement pédagogique, ministère de l'Education.
M. Jean-Marcel Mius d'Entremont	Coordonnateur de l'enseignement général, C.S.R. de Tilly.
M. Pierre-Paul Renaud	Conseiller pédagogique, C.S.R. Blainville-Deux-Montagnes.
M. Jean-Berchmans Veilleux	Conseiller pédagogique, C.S.R. de Chambly.
M. Michel Warisse	Enseignant, C.S. de Châteauguay.
M. Guy Zenaitis	Enseignant, C.E.C.M. (Commission des écoles catholiques de Montréal).
M. Edward Zegray	Conseiller pédagogique, C.E.C.M. (Commission des écoles catholiques de Montréal).

* Les personnes dont les noms suivent exerçaient les fonctions mentionnées pendant l'année scolaire 1981-1982.

TABLE DES MATIERES

1. Introduction 1

2. Notes pédagogiques 7

— Objectif général 1 9

- Objectif terminal 1.1 19
- Objectif terminal 1.2 49
- Objectif terminal 1.3 73
- Objectif terminal 1.4 115
- Objectif terminal 1.5 137
- Notes didactiques complémentaires 180

— Objectif général 2 ..... Fascicule B

— Objectif général 3 ..... Fascicule C

3. Evaluation pédagogique 243

4. Matériel didactique 257

5. Bibliographie 265

1

INTRODUCTION

Ce guide pédagogique[1] est associé au programme de mathématique du second cycle du secondaire (document no 16-3302). Son contenu n'est pas prescriptif et il se veut un document de support pédagogique à caractère indicatif.

> "Son intention générale est de promouvoir une bonne compréhension du programme, de suggérer aux enseignants des approches pédagogiques, des situations éducatives et des situations d'apprentissage jugées appropriées pour une bonne application du programme. Il vise aussi à susciter la créativité dans la recherche des moyens pédagogiques à mettre en oeuvre."[2]

Ce document[1] contient des commentaires sur chacun des objectifs généraux, terminaux et intermédiaires. Ces notes sont des points de repère jugés utiles dans l'élaboration d'un plan de cours. Elles ont pour objectif premier de définir des limites, d'indiquer des tendances ou de proposer des stratégies. Elles tentent de respecter les grands principes méthodologiques et de se conformer aux principes directeurs qui ont présidé à l'élaboration du programme.

De plus, à plusieurs endroits, ce guide pédagogique[1] renferme des indications d'enrichissement susceptibles de permettre aux élèves motivés une exploration plus complète de certains domaines traités par le programme.

---

1. Ce guide pédagogique est constitué de trois fascicules:
   - fascicule A: L'arithmétique et l'algèbre (document 16-3302-01);
   - fascicule B: La géométrie (document 16-3302-02);
   - fascicule C: La probabilité et la statistique (document 16-3302-03).
2. D.G.D.P., Cadre relatif à l'élaboration des programmes et des guides pédagogiques, page 19.

Il faut que chaque enseignant puisse modifier sa méthodologie face à la technologie afin de pouvoir l'exploiter d'une façon rationnelle en classe. L'un des principes directeurs de ce programme préconise l'utilisation de la calculatrice, du micro-ordinateur, etc. et nombreux sont les sujets traités dans le programme qui invitent à son emploi:

- la recherche de régularités sur les nombres;
- l'évaluation d'une suite d'opérations sur les grands ou petits nombres;
- la résolution d'équations par des méthodes itératives;
- la résolution de problèmes complexes;
- la validation d'approximations;
- la vérification de réponses;
- l'évaluation de formules en combinatoire ou en statistique;
- les rapports trigonométriques;
- etc.

Les deux derniers sujets cités dans cette liste exigent même l'emploi obligatoire d'outils électroniques. En effet, l'évaluation de formules en combinatoire ou en statistique serait beaucoup trop ardue et prendrait beaucoup trop de temps sans l'aide de ceux-ci; de plus, la non utilisation des tables trigonométriques oblige l'usage de la calculatrice. Dans le contexte où l'on veut favoriser l'emploi d'heuristiques variées dans la solution de problèmes associés à des situations réalistes, donc parfois très complexes, l'usage d'outils électroniques permet donc à l'élève de se dégager des préoccupations purement opératoires pour porter toute son attention sur le choix et l'utilisation des meilleures stratégies.

Il faut cependant ajouter que ce guide pédagogique n'est pas une "préparation de classe" et les informations qu'il renferme ne doivent pas être transmises directement à l'élève. Les commentaires et les notes didactiques complémentaires sont des textes qui s'adressent au maître et non à l'élève; il ne faut donc pas se surprendre de retrouver, à l'occasion, un exposé plus développé que celui qui doit normalement être présenté à l'élève.

Il est obligatoire d'assurer à tous les élèves une bonne compréhension de ce programme de base et de prévoir une place à la récupération à l'aide d'un enseignement correctif pour les élèves faibles et à l'enrichissement à l'aide de documents prévus à cette fin pour les élèves forts. L'explication des contenus couverts par ces activités de récupération ou d'enrichissement est une responsabilité des organismes scolaires.

Tout au long de ce guide, l'utilisation de techniques de résolution de problème est privilégiée en vue de mettre en évidence l'aspect pragmatique de la mathématique, et d'unifier les différents thèmes développés dans le programme: arithmétique, algèbre, géométrie, trigonométrie, statistique et probabilité. Il ne faudrait pas sous-estimer également la place importante que doit occuper le développement des habiletés dans le contexte d'un programme de base en mathématique. La bonne compréhension des concepts de base ne doit pas exclure la nécessité de faire acquérir à l'élève des algorithmes opératoires sûrs et efficaces.

Loin de bouder l'apport des technologies nouvelles, il importe de se pencher sérieusement sur l'impact de la calculatrice de poche dans la société et particulièrement dans le milieu scolaire. Nombreux sont les élèves qui en possèdent une et qui veulent s'en servir.

Un chapitre traitant de l'évaluation pédagogique suggère, à titre d'exemples, une grille pouvant permettre une évaluation continue des apprentissages, celle-ci permettant à l'enseignant d'être mieux outillé pour effectuer un enseignement correctif adapté à chacun de ses élèves (grille "A"). Une autre grille, la grille "B", pourrait éventuellement servir comme élément d'évaluation parmi d'autres sur lequel les autorités scolaires pourraient se baser pour déterminer la promotion de chaque élève.

L'enseignant pourra obtenir un supplément d'informations en consultant les chapitres quatre et cinq: "Matériel didactique" et "Bibliographie". Les informations citées dans ces deux chapitres ne sont nullement exhaustives et pourront être complétées par un inventaire des ressources du milieu.

Dans le but d'uniformiser et de favoriser une compréhension univoque des graphiques, notations et symboles, l'enseignant verra à consulter le Document d'information, graphisme, notations et symboles utilisés en mathématique au secondaire, (document 16-3306). Ce répertoire sera utilisé lors de la préparation des tests ou examens du ministère de l'Education.

2

NOTES PEDAGOGIQUES

OBJECTIF GENERAL

1

FAVORISER chez l'élève l'application des connaissances arithmétiques ou algébriques.

THEME: L'arithmétique et l'algèbre

DUREE: 30% du temps en troisième secondaire
30% du temps en quatrième secondaire
35% du temps en cinquième secondaire

Cet objectif général vise à développer chez l'élève des connaissances arithmétiques ou algébriques nécessaires dans sa vie de citoyen soit dans le but de l'outiller afin de lui permettre d'utiliser la mathématique dans sa vie quotidienne, soit dans le but de lui faire percevoir à l'aide de "modèles réduits" l'utilisation que l'on peut faire de la mathématique dans des situations plus complexes. Cet objectif général prend tout son sens dans la mesure où l'élève sera placé face à des situations où il devra:

- mathématiser ces situations (construire un modèle),
- opérer sur le modèle,
- interpréter les résultats.

Voilà autant d'habiletés (mathématiser, opérer, interpréter) qu'il convient de développer chez l'élève tout en utilisant les heuristiques applicables à la résolution de problème.

Il est évident que:

- la consommation,
- la finance,
- les impôts et taxes,
- la sociologie,
- l'informatique,
- les sciences humaines,
- les sciences pures,
- etc.

sont autant de sujets riches en situations de toutes sortes où la mathématique peut jouer un rôle déterminant. Il est important que l'enseignant fasse ressortir ce rôle social de la mathématique.

L'étude des équations et inéquations à une ou plusieurs variables permet des applications très variées; celles qui utilisent les inéquations exigent une recherche de solutions optimales. La programmation linéaire apparaît donc, dans ce contexte, comme l'aboutissement de l'étude des équations et inéquations en utilisant ces dernières pour créer un modèle qui sert à mieux saisir et interpréter le réel.

En résumé, cet objectif vise à permettre à l'élève d'acquérir les concepts et les algorithmes indispensables à une meilleure interprétation du monde environnant, de développer des habiletés relatives à la mathématisation, à la communication et aux applications.

C'est par une méthodologie adaptée à l'âge de l'élève, à ses intérêts et à son vécu que les connaissances arithmétiques ou algébriques seront acquises. Il est donc important d'exploiter des heuristiques et des stratégies développées dans le cadre de la résolution de problème pour mettre en évidence les aspects utilitaires et pragmatiques de la mathématique.

Il est bon de rappeler ici qu'au sens large, la résolution de problème renferme quatre grandes étapes:

- la compréhension du problème,
- l'élaboration d'un plan pour résoudre le problème,

- l'exécution du plan,
- l'analyse de la solution.

Celles-ci regroupent un certain nombre de stratégies toutes axées sur la résolution du problème concerné. Voici une liste non exhaustive des stratégies applicables à chacune de ces étapes.

1. Compréhension du problème:

   - lire le problème plusieurs fois et s'assurer de la compréhension de chacun des mots;
   - reformuler le problème en ses propres mots;
   - identifier les données;
   - identifier ce qui est recherché;
   - illustrer les données.

2. Elaboration d'un plan pour résoudre le problème:

   - éliminer les données non pertinentes;
   - rechercher les données manquantes;
   - construire ou compléter une figure;
   - décrire les principales conditions affectant le résultat;
   - subdiviser le problème en sous-problèmes;
   - dresser un inventaire de critères permettant de faire des choix dans un problème de prise de décision;

- rechercher un ou des énoncés, une ou des formules, une ou des propriétés, etc.;
- formuler des hypothèses;
- modéliser;
- faire une simulation du problème;
- utiliser une démarche à rebours;
- utiliser le procédé d'élimination;
- déterminer dans un ordre donné la ou les opérations appropriées;
- choisir les instruments, les procédés, les algorithmes les plus appropriés;
- faire appel à diverses ressources disponibles.

3. Exécution du plan:

- évaluer si on s'approche de la solution;
- effectuer les calculs requis;
- se rappeler un concept, une formule, un algorithme;
- utiliser une table, une calculatrice, etc.

4. Analyse de la solution:

- vérifier la pertinence des résultats;
- vérifier la démarche et les calculs;
- chercher d'autres démarches possibles;
- fournir une information complète dans la réponse;
- inventer ou rechercher d'autres problèmes analogues.

Appliquées à la résolution de problèmes écrits, les stratégies énoncées ci-haut pourraient se résumer à:

- lire attentivement le problème;
- reformuler en ses propres mots l'énoncé du problème;
- sélectionner les données pertinentes du problème;
- mathématiser la situation (créer le modèle mathématique);
- estimer le résultat;
- résoudre le problème;
- interpréter le résultat obtenu.

Résoudre un problème nécessite l'utilisation d'un certain nombre de stratégies puisées possiblement dans la liste énumérée précédemment.

Il est important que l'élève maîtrise les règles régissant le calcul algébrique et surtout qu'il comprenne les raisonnements qui le sous-tendent. L'utilisation de la calculatrice devrait être encouragée entre autres comme moyen rapide d'effectuer ou de vérifier l'exactitude du résultat des opérations portant sur les nombres. Cependant, l'élève ne doit pas être dépendant de celle-ci. L'usage de la calculatrice devrait toujours s'accompagner d'estimations, de vérifications et de recherches de séquences ou procédures.

De plus, la calculatrice devrait être utilisée dans l'exploration de régularités sur les nombres, dans la découverte d'invariants, dans la recherche de la solution d'une équation ou d'un système d'équations, dans la vérification de l'estimation du résultat d'une opération, etc.

Dans ce guide, on appellera séquence une suite ordonnée d'actions à poser en appuyant sur un certain nombre de touches d'une calculatrice; ainsi $\frac{3 - 11}{7}$ pourrait être traduit par la séquence [(] 3 [-] 11 [)] [÷] 7 [=]. On appellera procédure une séquence qui est indépendante de la valeur pour laquelle est effectué un calcul; ainsi la procédure [√] [-] 7 [=] peut être associée à $\sqrt{x} - 7$ et si l'on applique cette procédure au nombre 25, on obtient -2 comme résultat.

Il faut que l'enseignant prenne conscience que la sémantique des séquences ou procédures peut être une source de confusions pour l'élève et qu'elle peut influer sur sa compréhension des expressions mises en cause. Ainsi la procédure [$\frac{1}{x}$] [+] [$\frac{1}{x}$] [=] donnera $2\frac{1}{2}$ si la valeur initiale est 2 tandis que l'expression $\frac{1}{x} + \frac{1}{x}$ donnera 1 si $x = 2$.

IMPORTANT

a) Calculatrice

Les séquences ou procédures suggérées dans ce guide ne sont valides que sur certains types de calculatrices scientifiques. Il faudra donc user de prudence en les utilisant. Généralement une adaptation mineure permettra de les ajuster aux caractéristiques d'un modèle particulier.

b) Ordinateur

Ce guide renferme des exemples de programmes en BASIC. Leur utilisation sur un ordinateur donné pourra exiger de légères retouches à la syntaxe des programmes suggérés.

OBJECTIF TERMINAL 1.1 RESOUDRE des problèmes de la vie courante impliquant des nombres réels.

Au premier cycle du secondaire, l'élève a étudié les nombres naturels, entiers ou rationnels. Il complète cette étude des nombres par une approche intuitive des nombres réels en découvrant certaines de leurs caractéristiques par l'observation.

Sur le plan didactique, la calculatrice peut être ici d'un précieux secours. En effet, les règles des signes peuvent être induites à partir de l'observation de régularités sur les opérations d'addition et de multiplication de nombres positifs ou négatifs; le quotient de deux nombres entiers choisis de façon pertinente peut amener l'élève à percevoir les cycles du développement décimal (nombres rationnels); la racine carrée de nombres qui ne sont pas des carrés parfaits ne fournit jamais de nombres périodiques, ces nombres sont dits non périodiques, ce sont des irrationnels. Les deux derniers cas permettent d'introduire la notation scientifique et peuvent favoriser le développement des habiletés à arrondir des nombres et à estimer le résultat d'opérations.

Les problèmes extraits du quotidien sont souvent reliés à des concepts de rapports ou de propositions. Il convient donc que l'élève développe une connaissance structurée sur ceux-ci afin d'être en mesure de mieux interpréter le réel.

Voici une liste de quelques situations typiques où interviennent les nombres réels:

- le calcul des profits et pertes,
- la recherche du périmètre d'une figure, de l'aire d'une surface ou du volume d'un solide,
- la localisation d'un objet sur une ligne, dans le plan ou dans l'espace,
- l'usage de rapports pour représenter un objet à l'échelle,
- etc.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.1 DEGAGER les règles des signes à partir de régularités (pattern)	III	- Au premier cycle du secondaire, l'élève n'a pas complété l'étude des règles des signes pour la multiplication et la division. Cet objectif permet donc à l'élève de terminer cette étude tout en affermissant ses connaissances sur le sujet. - L'élève pourrait être amené à compléter les tableaux suivants (pour chacune des lignes ou pour chacune des colonnes) en observant et en appliquant certaines régularités sur les suites de nombres.

+	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
...	...	..	..	..	..	..	..	..	...
3	...	0	1	2	3	4	5	6	...
2	...	-1	0	1	2	3	4	5	...
1	...	-2	-1	0	1	2	3	4	...
0	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
-1	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	...
-2	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	...
-3	...	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	...
...	...	..	..	..	..	..	..	..	...

×	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
...	...	..	..	..	..	..	..	..	...
3	...	-9	-6	-3	0	3	6	9	...
2	...	-6	-4	-2	0	2	4	6	...
1	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
0	...	0	0	0	0	0	0	0	...
-1	...	3	2	1	0	-1	-2	-3	...
-2	...	6	4	2	0	-2	-4	-6	...
-3	...	9	6	3	0	-3	-6	-9	...
...	...	..	..	..	..	..	..	..	...

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.1 DEGAGER les règles des signes à partir de régularités (pattern) (suite).	III	- Une observation attentive des deux tableaux complétés peut permettre à l'élève de dégager les règles des signes à partir des régularités qu'on y rencontre

+	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
...	...	..	..	..	..	..	..	..	...
3	...	0	1	2	3	4	5	6	...
2	...		0	1	2	3	4	5	...
1	...			0	1	2	3	4	...
0	...				0	1	2	3	...
-1	...					0	1	2	...
-2	...						0	1	...
-3	...							0	...
...	...	..	..	..	..	..	..	..	...

×	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
...	...	..	..	..	..	..	..	..	...
3	...				0	3	6	9	...
2	...				0	2	4	6	...
1	...				0	1	2	3	...
0	...	0	0	0	0	0	0	0	...
-1	...				0				...
-2	...				0				...
-3	...				0				...
...	...	..	..	..	..	..	..	..	...

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.1 DEGAGER les règles des signes à partir de régularités (pattern) (suite).	III	Pour l'addition, la somme de deux nombres - est du signe du nombre ayant la plus grande valeur absolue; - est, en valeur absolue, égale: - à la somme des valeurs absolues des deux nombres, si ceux-ci sont de mêmes signes, - à la valeur absolue des différences des valeurs absolues des deux nombres, si ceux-ci sont des signes contraires. Pour la multiplication, le produit des deux nombres - est positif si les deux nombres ont mêmes signes; - est négatif si les deux nombres sont de signes contraires; - est, en valeur absolue, égale au produit des valeurs absolues des deux nombres. - Il est conseillé de présenter à l'élève la définition de la valeur absolue à partir d'exemples tels: $\|8\| = 8$; $\|-3\| = 3$ en introduisant ni formalisme ni l'étude des propriétés de la valeur absolue. - Formellement, on peut définir la valeur absolue ainsi: $\forall a \in \mathbb{R}_+ : \|a\| = a$ $\forall a \in \mathbb{R}_- : \|a\| = -a$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.1 DEGAGER les règles des signes à partir de régularités (pattern) (suite).	III	- L'enseignant peut également en profiter pour faire découvrir d'autres régularités intéressantes par l'observation des différentes diagonales. - Les tableaux précédents pourraient être construits par ordinateur. On peut suggérer aux élèves de composer un programme et de le faire exécuter. Voici à titre d'exemple un programme BASIC permettant de créer le tableau associé à la multiplication; les valeurs varient de -5 à +5.

```
 10 CLS
 20 PRINT "Tableau des signes de la multiplication".
 30 PRINT
 40 PRINT " ";
 50 FOR X=-5 TO 5
 60 PRINT X;
 70 NEXT X
 80 PRINT
 90 PRINT
100 FOR Y=5 TO -5 STEP -1
110 PRINTUSING "########";Y;
120 PRINT " ";
130 FOR X=-5 TO 5
140 IF X*Y>0 THEN PRINT "+"; ELSE IF X*Y<0 THEN PRINT "-";
    ELSE PRINT "0";
150 NEXT X
160 PRINT
170 NEXT Y
180 END
```

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.1 DEGAGER les règles des signes à partir de régularités (pattern) (suite).	III	- En mathématique, on fait la distinction entre le signe "-" de la soustraction et le signe "-" de l'opposé d'un nombre. Généralement la calculatrice utilise respectivement les touches [-] et [+/-] . La commande [-] s'emploie avec deux opérandes (commande diadique) et la commande [=]; cette dernière provoque l'exécution de la soustraction. La commande [+/-] permet de modifier le signe du nombre affiché. Cette commande est dite monadique ou à une opérande. La calculatrice peut être utilisée pour opérer sur de grands et petits nombres afin de faire vérifier à l'élève que les règles des signes s'appliquent à tous les nombres. - Des situations telles que "profits et pertes", "débits, crédits", "températures", "positions relatives d'objets sur une carte ou un plan", etc. peuvent servir à mieux faire dégager certaines règles des signes par l'élève. Cependant, comme il est difficile de trouver une situation concrète qui se représente par (-9) ÷ (-3), il est souhaitable de faire construire des tableaux et d'y faire ressortir les régularités appropriées. L'emploi de la calculatrice dans ce dernier cas a l'avantage de permettre une généralisation qui, sans cela, pourrait paraître injustifiée à l'élève.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.2 APPLIQUER les règles des signes dans l'évaluation d'expressions numériques ou littérales.	III	- L'évaluation des expressions numériques ou littérales simples devrait se réaliser sans l'aide de la calculatrice. - L'élève devrait être habile à déterminer le signe des expressions telles: $-2,75 + 7,43 - 6,994 + \ldots$ $-2,43(3,7 - 11,71)$ $-6,43 \div (4,05)$ ou $3ab - 4b$ si $a = -0,47$ et $b = 3$ $\frac{2at - u}{3b}$ si $a = -2$, $b = 3,5$, $t = -0,7$, $u = -5$ - Une fois que l'élève maîtrise les règles des signes, il est possible de lui présenter des situations lui permettant d'appliquer certaines formules. Exemple: Les élèves laissent tomber une balle du toit d'un édifice. La formule qui permet de calculer la vitesse de la balle à tout moment est $v = v_o + at$ (on ne tient pas compte de la résistance de l'air)

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.2 APPLIQUER les règles des signes dans l'évaluation d'expressions numériques ou littérales (suite).	III	où: v est la vitesse de la balle; v_o est la vitesse initiale de la balle; a est l'accélération due à la pensanteur $a \approx 9{,}806\ 65\ m/s^2$ t est le temps exprimé en seconde (s) Quelle vitesse atteint la balle en touchant le sol? A partir de mesures faites par les élèves (3 mesures par élève), faire compléter le tableau en utilisant: $v = 0 + 9{,}806\ 65\ t$ $= 9{,}806\ 65\ t$

Temps			Temps moyens	Vitesses
3,1	2,9	3,0	3,0	29,4
2,9	2,8	3,1	2,9	28,4

LM			TM	VM

Chaque élève détermine le temps moyen de chaque lancer; les résultats sont arrondis au dixième le plus près. Il calcule ensuite la vitesse à l'aide de la procédure

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.2 APPLIQUER les règles des signes dans l'évaluation d'expressions numériques ou littérales (suite).	III	[×] 9,806 65 [=] et les résultats sont arrondis au dixième le plus près. L'élève calcule ensuite la moyenne: - des temps de tous les lancers (LM), - des temps moyens (TM), - des vitesses (VM), et enfin il calcule la vitesse à partir de LM et de TM. Il compare ensuite les résultats obtenus. Dans la plupart des cas, les résultats sont différents selon que l'élève arrondit chaque donnée, les résultats intermédiaires ou le résultat final. - On peut profiter de l'occasion pour signaler à l'élève que les imprécisions provoquées par l'arrondissement se cumulent tout au long de l'exercice.
1.1.3 EXPRIMER un nombre décimal en notation scientifique et vice versa.	III	- Les calculatrices et les ordinateurs utilisent fréquemment la notation scientifique afin de fournir une bonne approximation d'un nombre donné. Dans un tel contexte, il devient indispensable que l'élève acquière l'habilité à transformer un nombre décimal en un nombre exprimé en notation scientifique et vice versa ainsi qu'à reconnaître les limites de précision de cette dernière notation.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.3 EXPRIMER un nombre décimal en notation scientifique et vice versa (suite).	III	- Jusqu'à tout récemment, exprimé en notation scientifique, le nombre 13 475 432,4 s'écrivait $1{,}347\ 543\ 24 \times 10^7$. Les calculatrices et les ordinateurs utilisent cependant le symbolisme 1,347 543 24 E 7 pour désigner le même nombre (ici E 7 signifie $\times 10^7$). A cause de l'influence de plus en plus grande des calculatrices et des ordinateurs, l'écriture à privilégier pour la notation scientifique sera 1,347 543 24 E 7 pour le nombre 13 475 432,4. - La représentation en notation scientifique du nombre n s'écrit sous la forme m E e où $\lvert m \rvert \in [1, 10[$ et $e \in \mathbb{Z}$. La relation théorique liant les nombres n, m et e peut s'exprimer par n = m E e. Ainsi 1439,72 = 1,439 72 E 3, 0,098 = 9,8 E -2, -329,4 = -3,294 E -2. - Il est important de faire observer à l'élève que la notation scientifique que permet d'atteindre un certain degré de précision (généralement de 8 à 10 chiffres significatifs) et que pour des nombres excédant ces huit ou dix chiffres significatifs, il faut tolérer un certain degré d'imprécision. Par exemple: a) 123 × 456 = 5,6088 E 4 b) 17,3 × 0,021 = 3,633 E -1 sont deux situations où les réponses exprimées en notation scientifique

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.3 EXPRIMER un nombre décimal en notation scientifique et vice versa (suite).	III	correspondent exactement aux résultats des opérations. Cependant 123 456 789 × 123,456 789 ≈ 1,524 157 875 E 10 et le symbole ≈ se lit "... est approximativement égal à ..."; il ne peut y avoir d'égalité entre 123 456 789 × 123,456 789 et 1,524 157 875 E 10 car le produit des deux nombres ci-haut possède 17 chiffres significatifs. Pour les mêmes raisons, $\frac{2}{3} \approx$ 6,666 666 667 E -1 car $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$. - La calculatrice peut être utilisée pour permettre à l'élève de vérifier s'il effectue correctement le passage d'une notation à une autre. - Dans l'exemple ci-dessous, la notation scientifique est utilisée pour décrire certaines caractéristiques de la terre. . le grand axe de l'orbite terrestre est d'environ 2,99 E 8 km . le diamètre équatorial de la terre est d'environ 1,2756 E 4 km . le diamètre polaire de la terre est d'environ 1,2713 E 4 km . une seconde vaut environ 3,1688 E -8 année . etc.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.3 EXPRIMER un nombre décimal en notation scientifique et vice versa (suite).	III	- En BASIC, l'instruction PRINTUSING "##, ##[[[["; permet d'écrire le nombre N en notation scientifique en arrondissant la deuxième décimale. Si N = 2337, l'impression de ce nombre s'effectuera sous la forme 2,34 E + 03.
1.1.4 ARRONDIR le résultat d'une opération sur des nombres décimaux, à un ordre de grandeur donné.	III	- Au premier cycle du secondaire, l'élève a appris à arrondir: - à la centaine près; - à la dizaine près; - à l'unité près; - au dixième près; - au centième près. - Au deuxième cycle du secondaire, l'élève devrait être capable d'arrondir à n'importe quel ordre de grandeur donné. L'habileté à arrondir des nombres est un outil indispensable à l'atteinte de l'objectif 1.1.5.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.4 ARRONDIR le résultat d'une opération sur des nombres décimaux, à un ordre de grandeur donné (suite).	III	Exemple: Trouve le prix de revient arrondi à la centaine près pour l'achat d'une voiture si le prix de liste est 8795 $ et si l'acheteur obtient une réduction de 5%. Solution: $8795 - (8795 \times 0,05) = 8355,25$ Réponse: Le prix d'achat est d'environ 8400 $ - Si les techniques d'arrondissement sont appliquées sur chaque nombre composant l'expression à évaluer, et que l'on opère sur ces valeurs arrondies, il devient alors possible d'estimer rapidement et mentalement le résultat. Ainsi l'expression $8795 - (8795 \times 0,05)$ pourrait devenir $8800 - (9000 \times \frac{5}{100})$ ce qui donne 8800 - 450 = 8350 $. Cette technique d'estimation relève de l'objectif 1.1.5.. - Règle générale, lorsque l'on opère sur des nombres décimaux à l'aide d'une calculatrice, celle-ci arrondit les résultats des opérations avant de les afficher. Ainsi $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ sera associé à 0,999 999 9 et non à 1 car la calculatrice tronque les résultats en ne gardant que les sept premières décimales, les autres étant perdues. C'est un exemple d'arrondissement à 0,000 000 1 par défaut. Si la calculatrice

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.4 ARRONDIR le résultat d'une opération sur des nombres décimaux, à un ordre de grandeur donné (suite).	III	affiche 1, c'est qu'elle a arrondi le résultat. - Les différents langages de programmation possèdent généralement des instructions permettant d'arrondir un nombre. En BASIC, par exemple, 5,726 sera arrondi à 5,77 par l'instruction PRINTUSING "##, ##"; N. - Afin de permettre à l'élève de constater s'il comprend bien l'algorithme mis en cause par l'utilisation de l'algorithme d'arrondissement, on peut demander à l'élève de concevoir un programme permettant d'arrondir un nombre à un ordre de grandeur donné. Le programme BASIC suivant utilise un tel algorithme. 10 CLS 20 INPUT "Indique le nombre à arrondir"; N 30 INPUT "Quel est l'ordre de grandeur de l'arrondissement"; A 40 N=N÷A 50 IF N-INT(N)≥0.5 THEN N=INT(N)+1 ELSE N=INT(N) 60 N=N*A 70 PRINT 80 PRINTUSING "##########, ##########"; N 90 END Le tableau de la page suivante présente une simulation de l'exécution de ce programme pour certaines valeurs de N et de A.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.4 ARRONDIR le résultat d'une opération sur des nombres décimaux à un ordre de grandeur donné (suite).	III	

Valeurs		Instructions		
N	A	40	50	60 et 80
537	10	53,7	54	540
532,6	100	5,326	5	500
0,123	0,01	12,3	12	0,12
0,178	0,11	1,78	2	0,2
-12,719	1	-12,719	-13	-13

- A la ligne

  40 on effectue la division;

  50 on arrondit le résultat de la division à l'unité près;

  60 on multiplie le résultat obtenu à la ligne 50;

  80 on imprime la réponse.

- ENRICHISSEMENT: Calculer l'ordre de grandeur de l'erreur due à la troncation.

  Effectuer $\frac{4}{11} + \frac{6}{9} + \frac{5}{7}$ si la troncation s'effectue après

  $$0,363 + 0,666 + 0,714 = 1,743$$

  Une valeur plus précise est déterminée par la

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.4 ARRONDIR le résultat d'une opération sur des nombres décimaux à un ordre de grandeur donné (suite).	III	procédure. 4 [×] 9 [×] 7 [+] 6 [×] 11 [×] 7 [+] 5 [×] 11 [×] 9 [=] [÷] 11 [÷] 9 [÷] 7 [=] On trouve alors 1,744 588 7 (la valeur exacte est 1,744 588). L'ordre de grandeur de l'erreur sera de 1,745 - 1,743 = 0,002 où 1,745 est l'arrondissement de $1,\overline{744\ 588}$ au millième près.
1.1.5 ESTIMER à un ordre de grandeur donné un produit, un quotient, un carré ou une racine carrée, un cube ou une racine cubique de nombres réels.	III	- Cet objectif vise à rendre l'élève critique face aux résultats obtenus en utilisant une calculatrice. Chaque fois que celui-ci effectue une série d'opérations à l'aide d'un instrument électronique, il devrait être en mesure d'indiquer l'ordre de grandeur de la réponse à obtenir. - Une bonne estimation de 123 × 459 serait 100 × 500 = 50 000 en arrondissant les composantes du produit à la centaine près. En fait, 123 × 459 = 56 457. - L'estimation du carré de la racine carrée, du cube et de la racine cubique a été retenue à cause de ses applications au niveau de l'étude des aires et des volumes en géométrie.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.5 ESTIMER à un ordre de grandeur donné un produit, un quotient, un carré ou une racine carrée, un cube ou une racine cubique de nombres réels (suite).	III	- Pour des fins de vérifications, il est possible d'extraire la racine carrée ou la racine cubique d'un nombre avec une calculatrice. a) Voici une séquence à suivre pour extraire la racine carrée de 25: 25 [log] [÷] 2 [=] [10^x] b) Voici une séquence à suivre pour extraire la racine cubique de 27: 27 [log] [÷] 3 [=] [10^x] c) Souvent sur ordinateur, l'expression EXP(1/3*LN 27) va permettre d'évaluer la racine cubique de 27. - Les logarithmes décimaux (log) et naturels (ln) sont des sujets réservés aux cours à option. Il est donc inutile de vouloir faire comprendre à l'élève le sens des opérations inhérentes à ces procédures car il ne possède pas les préalables nécessaires. Cependant les séquences décrites en a) ou en b) peuvent lui être fournies afin qu'il puisse extraire des racines carrées ou cubiques. En généralisant, on obtient la procédure x [log] [×] n [=] [10^x] ou x [ln] [×] n [=] [e^x] - De même, il est possible de trouver la n ième puissance de x (x^n) en utilisant la procédure suivante:

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.5 ESTIMER à un ordre de grandeur donné un produit, un quotient, un carré ou une racine carrée, un cube ou une racine cubique de nombres réels (suite).	III	ou x [log] [×] n [=] [10^x] x [ln] [×] n [=] [e^x] - Il est possible de présenter des situations très diversifiées. Voici un exemple. Estimer le nombre de grains se trouvant sur la 64e case d'un échiquier si on place 1 grain sur la première case, 2 sur la deuxième, 4 sur la troisième, 8 sur la quatrième et ainsi de suite. L'observation permet de découvrir la régularité suivante:

Numéros de case	1	2	3	4	...	64
Grains	1	2	4	8	...	...
	2^0	2^1	2^2	2^3	...	2^{63}

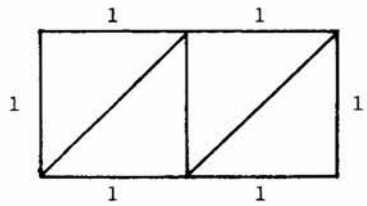
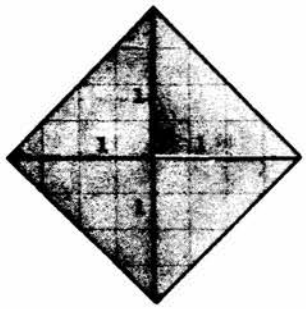
si on sait que $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 1024$ et se note 2^{10}, une bonne approximation de 1024 sera 1000 d'où:

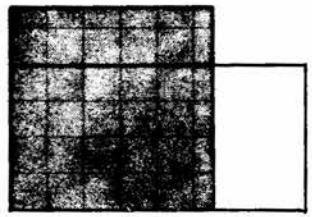
$$\begin{aligned} 2^{63} &= 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^3 \\ &\approx 10^3 \times 10^3 \times 10^3 \times 10^3 \times 10^3 \times 10^3 \times 8 \\ &\approx 8 \times 10^{18} \\ &\approx 8 \text{ E } 18 \end{aligned}$$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.5 ESTIMER à un ordre de grandeur donné un produit, un quotient, un carré ou une racine carrée, un cube ou une racine cubique de nombres réels (suite).	III	Avec la calculatrice, on obtient 9,2234 E 18. - Faire une estimation c'est prédire, avec une marge d'erreur plus ou moins grande, la valeur d'un résultat, la grandeur d'un nombre, le prix d'une maison, les ressources énergétiques d'un pays, l'âge d'une personne, le périmètre d'un cercle, l'heure, la durée de vie d'une étoile, la possibilité de trouver un emploi, les intentions de vote des citoyens aux prochaines élections et bien d'autres encore. - Estimer c'est porter un jugement à partir de la connaissance que l'on a de l'objet à estimer, ou encore, de l'expérience acquise au contact de cet objet. Un peintre estime du premier coup d'oeil le nombre de litres de peinture à utiliser pour repeindre une pièce, le cuisinier estime la quantité de sel à mettre dans l'eau du court-bouillon. - La hauteur d'une maison peut s'estimer en comptant le nombre d'étages que l'on sait être d'une hauteur d'à peu près 2,70 m. Ou encore, on estime que 2^{30} est proche du milliard parce que l'on sait que 2^{10} est proche de mille. Ou encore que la racine de 120 est proche de 10 parce que l'on sait que la racine de 100 est 10. D'autres diront qu'elle est proche de 11. - A partir d'une estimation on fait généralement, grâce à des informations supplémentaires, de nouvelles estimations dans le but de se rapprocher davantage de la valeur réelle de ce que l'on cherche.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.5 ESTIMER à un ordre de grandeur donné un produit, un quotient, un carré ou une racine carrée, un cube ou une racine cubique de nombres réels (suite).	III	- Utiliser une méthode permettant de se rapprocher peu à peu de la valeur réelle de ce que l'on cherche, c'est faire une estimation ou une approximation. - Une activité intéressante consiste, à partir d'une expression numérique, de demander à l'élève d'arrondir chaque nombre de façon à pouvoir effectuer le calcul mentalement. Ensuite, lui demander d'effectuer le calcul à l'aide de la calculatrice. Exemple: (132 × 48) + 4950 arrondir: (130 × 50) + 5000 calculer mentalement: 6500 + 5000 = 11 500 calculer exactement: 11 286 Il est alors possible d'évaluer l'habileté à estimer en calculant: $\frac{\text{valeur estimée - valeur exacte}}{\text{valeur exacte}} = \frac{\text{valeur estimée}}{\text{valeur exacte}} = -1$ et en appliquant cette formule à l'exemple précédent, on trouve 0,019 à l'aide de la séquence: [(] 11500 [-] 11286 [)] [÷] 11286 [=] ou plus simplement: 11500 [÷] 11286 [=] [-] 1 [=]

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.5 ESTIMER à un ordre de grandeur donné un produit, un quotient, un carré ou une racine carrée, un cube ou une racine cubique de nombres réels (suite).	III	Comme la valeur trouvée est positive, cela indique que l'estimation était plus grande que la valeur exacte. Plus ce résultat est proche de 0, plus l'estimation est précise. - L'élève qui utilise une calculatrice doit prendre l'habitude d'estimer le résultat cherché. Estimer, c'est trouver un moyen de donner un résultat vraisemblable. Parfois on peut se contenter de donner l'ordre de grandeur du résultat. Plus la méthode d'estimation utilise d'indices, plus le résultat de l'estimation est près du résultat exact. L'estimation qui se fait avant de calculer avec la machine est une prévision du résultat à obtenir, celle qui se fait après le calcul est une vérification de la plausibilité du résultat obtenu. - La transcription de nombres à l'aide de la notation scientifique peut, si elle est utilisée conjointement avec l'utilisation de techniques d'arrondissement, favoriser une estimation rapide du résultat d'opérations. Exemples: $12350 + 17874 \approx 1{,}0\ E\ 4 + 2{,}0\ E\ 4 = 3{,}0\ E\ 4 = 30000$ $175000 - 13470 \approx 1{,}8\ E\ 5 - 1{,}3\ E\ 4 = 18\ E\ 4 - 1{,}3\ E\ 4 = 16{,}7\ E\ 4 = 167000$ $\frac{3722 \times 52514}{280412} \approx \frac{4\ E\ 3 \times 5\ E\ 4}{3\ E\ 5} = \frac{20\ E\ 7}{3\ E\ 5} = \frac{20}{3}\ E\ 2 = 6{,}\overline{6}\ E\ 2 = 666{,}\overline{6}$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.5 ESTIMER à un ordre de grandeur donné un produit, un quotient, un carré ou une racine carrée, un cube ou une racine cubique de nombres réels (suite).	III	Cette technique demande une bonne estimation des ordres de grandeur particulièrement lorsque l'on a à effectuer des opérations d'addition ou de soustraction. Ainsi dans le second exemple, 1,8 E 5 - 1,3 E 4 donne 1,67 E 5 et non 0,5 E 1. - ENRICHISSEMENT: - Estimer à un ordre de grandeur donné la racine carrée de 2. - Evaluer géométriquement $\sqrt{2}$ c'est mesurer le côté d'un carré d'aire 2. A partir de quatre triangles rectangles isocèles on peut construire un tel carré sans faire appel au théorème de Pythagore.   C'est un procédé de construction géométrique de $\sqrt{2}$. Comment déterminer $\sqrt{2}$ par une approximation décimale? On peut commencer à l'aide d'une règle mais on sera limité à 0,1 millimètre, il faudrait alors agrandir la figure ce qui constitue un problème d'ordre pratique.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.5 ESTIMER à un ordre de grandeur donné un produit, un quotient, un carré ou une racine carrée, un cube ou une racine cubique de nombres réels (suite).	III	Modifions notre approche. Si un rectangle est d'aire 2, $\sqrt{2}$ est compris entre les mesures des côtés du rectangle.  • le carré est d'aire 2. • la base du rectangle et sa hauteur encadrent $\sqrt{2}$. Un tel rectangle d'aire 2 peut être de base 2 et de hauteur 1 $(b_1 = 2,\ h_1 = 1)$. Pour avoir un rectangle "plus carré" que le premier, on peut choisir celui dont la base est la moyenne arithmétique entre la base et la hauteur du premier. $b_2 = \frac{b_1 + h_1}{2}$ d'où $h^2 = \frac{2}{b^2}$ Ainsi $b_2 = \frac{2 + 1}{2} = 1,5$ $h_2 = \frac{2}{1,5} \approx 1,333\ 333\ 3$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.5 ESTIMER à un ordre de grandeur donné un produit, un quotient, un carré ou une racine carrée, un cube ou une racine cubique de nombres réels (suite).	III	

On continue ainsi de façon systématique.

$$b_3 = \frac{b_2 + h_2}{2} \approx 1{,}416\ 666\ 7 \qquad h_3 = \frac{2}{b_3} \approx 1{,}411\ 764\ 7$$

Puisque $\sqrt{2}$ est entre b_3 et h_3 on doit conclure que l'expression décimale de $\sqrt{2}$ commence par 1,41. Il suffit de trouver des procédures qui permettent de calculer les dimensions des rectangles qui deviennent "de plus en plus carrés".

Un tableau illustrera la convergence vers $\sqrt{2}$.

Rectangles	Bases	Hauteurs	Chiffres significatifs
1	2	1	-
2	1,5	1,333 333 3	1
3	1,416 666 7	1,411 764 7	1,41
4	1,414 215 7	1,414 211 4	1,414 21
5	1,414 213 6	1,414 213 6	1,414 213

La recherche de procédures sera précédée d'un arrangement de l'expression à calculer. Puisque la base détermine la hauteur on a

$$bh = 2 \quad \text{et} \quad h = \frac{2}{b}$$

et comme la base du rectangle suivant est $\frac{b + h}{2}$, il suffira de calculer pour chaque valeur de b affichée

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.5 ESTIMER à un ordre de grandeur donné un produit, un quotient, un carré ou une racine carrée, un cube ou une racine cubique de nombres réels (suite).	III	$\frac{1}{2}(b + \frac{2}{b})$ ou $(b + \frac{2}{b})\frac{1}{2}$ ou $(\frac{2}{b} + b)\frac{1}{2}$ A partir de la valeur de b, on exécute la procédure: [+] [1/x] [×] 2 [=] [÷] 2 [=] ou [1/x] [+] [1/x] [÷] 2 [=] (avec des calculatrices qui ont la priorité des opérations); ou [STO] [1/x] [×] 2 [+] [RCL] [=] [÷] 2 [=] ou [STO] [(] [RCL] [+] [(] 2 [÷] [RCL] [)] [)] [÷] 2 [=]. Cette façon de procéder pour aborder un nombre comme $\sqrt{2}$ est dynamique. De plus, elle a l'avantage d'être supportée par une interprétation géométrique à chaque étape. C'est un procédé itératif.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.6 Deux rapports égaux étant donnés, ETABLIR d'autres proportions en appliquant les propriétés de l'égalité de rapports.	IV	- En deuxième secondaire, l'élève a appris à: "CONSTRUIRE des rapports équivalents à partir d'un rapport donné"; "MONTRER que deux rapports donnés forment une proportion"; "CALCULER la valeur d'un terme dans une proportion"; "A partir d'un contexte réaliste, RESOUDRE un problème appliquant une "règle de trois" simple". - Les rapports $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ forment une proportion si et seulement si ils sont égaux (non nécessairement identiques). Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux rapports ($b \neq 0$ et $d \neq 0$), ceux-ci forment une proportion si et seulement si $ad = bc$ et l'on écrit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. - Dans une proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors: - les termes a et d sont appelés les extrêmes; - les termes b et c sont appelés les moyens. - Soient les rapports égaux $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, alors: a) inverser les deux rapports donne une nouvelle proportion;

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.6 Deux rapports égaux étant donnés, ETABLIR d'autres proportions en appliquant les propriétés de l'égalité de rapports (suite).	IV	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$; b) interchanger les extrêmes donne une nouvelle proportion; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$, $d \neq 0$; c) interchanger les moyens donne une nouvelle proportion; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$; d) multiplier les deux termes d'un rapport par une quantité non nulle permet d'établir une proportion composée du rapport original et du nouveau rapport; $\frac{a}{b} = \frac{na}{nb}$; $n \neq 0$, $b \neq 0$. Exemple: Quel est le rapport des circonférences de deux cercles dont les rayons mesurent respectivement 2,2 cm et 7 cm? $\frac{2\pi \times 2,2}{2\pi \times 7} = \frac{2,2}{7} = \frac{2,2 \times 5}{7 \times 5} = \frac{11}{35}$ e) dans une proportion, la somme des numérateurs est à la somme des dénominateurs comme un numérateur est à son dénominateur;

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.1.6 Deux rapports égaux étant donnés, ETABLIR d'autres proportions en appliquant les propriétés de l'égalité de rapports (suite).	IV	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a + c + e}{b + d + f}$; $b \neq 0$, $d \neq 0$, $f \neq 0$. Exemple: Trois personnes investissent respectivement 2500 $, 3000 $ et 4250 $ dans une entreprise commune. Si les gains sont partagés proportionnellement aux investissements, combien chacun recevra-t-il si ces gains sont de 5645 $ après la première année? $\frac{5645}{9750} = \frac{x_1}{2500}$ $\frac{5645}{9750} = \frac{x_2}{3000}$ $\frac{5645}{9750} = \frac{x_3}{4250}$ Les gains seront répartis ainsi: - le premier 1447,44 $ - le deuxième 1736,92 $ - le troisième 2460,64 $

OBJECTIF TERMINAL 1.2 RESOUDRE des problèmes de la vie courante se traduisant par une expression algébrique du premier degré à une variable réelle.

Au premier cycle du secondaire, l'élève a appris à "RESOUDRE des problèmes faisant appel à des formules usuelles, ou à des équations simples à une variable" (objectif 3.2). Les formes propositionnelles présentées à l'élève étaient simples et ne faisaient jamais appel à des situations exigeant d'effectuer:

- le produit d'un nombre (positif ou négatif) par un nombre négatif,
- le quotient d'un nombre (positif ou négatif) par un nombre négatif,

car de telles situations ne se présentent que très rarement dans le quotidien. Il convient cependant de systématiser, en troisième secondaire, l'étude de la règle des signes et de l'appliquer dans la résolution d'équations et d'inéquations du premier degré à une variable.

Il convient également de signaler que l'ensemble référentiel des formes propositionnelles présentées à l'élève sera l'ensemble des nombres réels et que les coefficients ou constantes qui entrent dans la composition de ces formes propositionnelles seront aussi des nombres réels.

Bien que cet objectif recouvre les mêmes concepts mathématiques de base (application des propriétés sur les nombres, règles de stabilité, etc.) que l'objectif 3.2 présenté en deuxième secondaire, il n'en reste pas moins que l'ensemble référentiel utilisé introduit une nouvelle dimension et de nouvelles difficultés. L'étude plus systématique de la règle des signes ne doit donc pas se faire pour elle-même, mais plutôt dans un contexte d'applications pour la transformation d'une expression algébrique en une autre qui lui soit équivalente.

Il faut profiter de l'étude des objectifs de cette section pour résoudre divers problèmes d'achat, de vente ou de pourcentage axés sur le monde des affaires, sur la consommation ou les loisirs. Ces problèmes peuvent souvent se traduire par une expression algébrique du premier degré à une variable.

Exemple: Lydia achète une automobile 4750,00 $. Combien déboursera-t-elle pour cet achat, le taux de la taxe de vente étant de 8%?

Ce montant peut être désigné par x ou toute autre lettre

d'où $x = (4750{,}00 \times 8\%) + 4750{,}00$ ou

$x = 4750{,}00 \times 108\%$

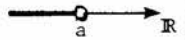
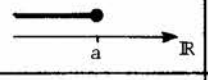
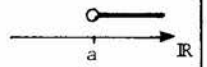
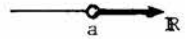
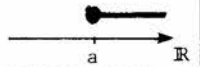
x dans ce cas mérite beaucoup plus le nom d'inconnue que celui de variable car une seule valeur peut être associée à x.

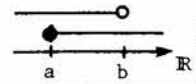
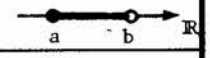
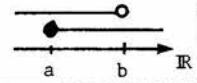
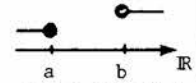
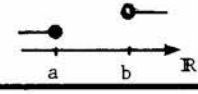
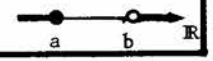
Une expression algébrique du premier degré à une variable réelle tirée de problèmes est soit une équation, soit une inéquation ou une formule. Au premier cycle, l'élève a rencontré maintes situations de résolution d'équations. Les connaissances acquises lors de la résolution des équations seront fort utiles à l'élève pour la résolution des inéquations. Les règles:

- retrancher ou ajouter à chaque membre une même quantité,
- multiplier ou diviser chaque membre par un même nombre positif non nul,

sont toujours valides pour le traitement des inéquations. Une première différence se situe au niveau des axiomes de l'ordre. En effet, il faut changer le sens de l'inéquation lors-

qu'on multiplie ou divise chaque membre par un nombre négatif non nul: si $-2 < 8$ alors $-2(-2) > -2(8)$ c'est-à-dire $4 > -16$. Une seconde différence s'observe au niveau de l'ensemble-solution. Pour une équation du premier degré à une inconnue, l'ensemble-solution est un singleton tandis que pour une forme propositionnelle simple ou composée, il est possible de retrouver des situations telles:

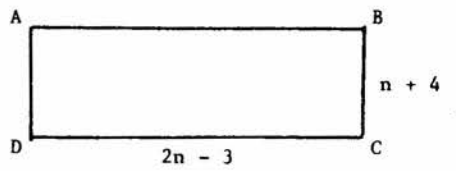
Formes propositionnelles	Situations intermédiaires	Solutions
$x < a$		
$x \leq a$		
$x > a$		
$x \geq a$		

Formes propositionnelles	Situations intermédiaires	Solutions
$x \geq a$ et $x < b$		
$x \geq a$ ou $x < b$		
$x \leq a$ et $x > b$		ϕ
$x \leq a$ ou $x > b$		

Exemple: Trouver les valeurs de n qui feront que le périmètre du rectangle ABCD de la page suivante sera inférieur à 26 mètres?

En appliquant la formule relative à la recherche du périmètre d'un rectangle, il est possible d'obtenir l'inéquation:

$$2\ [\ (2n - 3) + (n + 4)\ ] < 26$$



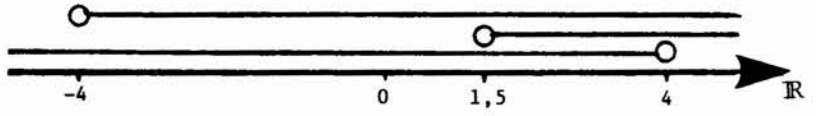
Une analyse attentive de la situation oblige l'observation suivante: "un côté ne peut avoir une longueur nulle ou négative". Ceci impose les deux contraintes supplémentaires suivantes:

$$2n - 3 > 0 \text{ et } n + 4 > 0$$

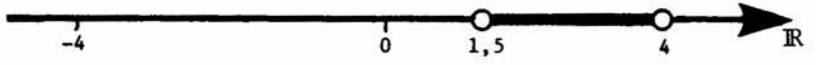
Le modèle mathématique décrivant cette situation est donc formé d'un système constitué de trois inéquations. Le voici:

$$\left.\begin{array}{r} 2\ [\ (2n - 3) + (n + 4)\ ] < 26 \\ 2n - 3 > 0 \\ n + 4 > 0 \end{array}\right\} \quad \text{équivalent à} \quad \left\{\begin{array}{l} n < 4 \\ n > 1{,}5 \\ n > -4 \end{array}\right.$$

On peut le représenter ainsi:



ou:



d'où: $1{,}5 < n < 4$

et il faut conclure que n doit se situer entre 1,5 et 4 si l'on veut satisfaire aux conditions énoncées dans le problème.

Les heuristiques utilisées dans la résolution de problèmes pourrait grandement aider l'élève à mathématiser les situations qui lui seront présentées, si diverses soient-elles. Ces situations doivent autant que possible être puisées dans l'environnement de l'élève. Voici un exemple:

> Un élève a conservé 75% des 900 points attribués lors des derniers examens. Quelle note sur 100 devra-t-il obtenir à son prochain examen pour obtenir un résultat cumulatif de 77%?

Ce type de problème est classique; voici une méthode de résolution qui l'est beaucoup moins.

Notes ajoutées	Notes finales	Notes finales en pourcentage
15	$900\times0,75=675$ $+\ 15$ 690	$\frac{690}{1000} = 0,69 = 69\%$
		$675 + 15 = 690$
45	$900\times0,75=675$ $+\ 45$ 720	$\frac{720}{1000} = 0,72 = 72\%$
		$675 + 45 = 720$
65	$900\times0,75=675$ $+\ 65$ 740	$\frac{740}{1000} = 0,74 = 74\%$
		$675 + 65 = 740$
x	$900\times0,75=675$ $+\ x$ $675+x$	$\frac{675+x}{1000} = 0,77 = 77\%$
		$675 + x = 770$

Grâce à l'observation de quelques essais, l'élève est conduit à mathématiser (traduire par une équation) une situation. Habituellement, la méthode de résolution de ce genre de problème visait l'apprentissage d'une technique de mise en équation. La résolution de l'équation $675 + x = 770$ pourra se faire par encadrement (tableaux), par réduction ou par itération (voir résolution d'un système).

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.2.1 TROUVER l'expression équivalente la plus simple à une expression algébrique donnée.	III	- Cet objectif est identique à l'objectif 3.1.7 du programme du premier cycle. Il fut présenté à l'élève de deuxième secondaire. Il vise à permettre à l'élève de réviser les notions acquises sur les polynômes simples et à reculer un peu plus ses limites en ce domaine. On fera effectuer à l'élève des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division sur des polynômes simples. Exemple 1: $a + 7b + 2a + 3b$ — commutativité de l'addition $a + 2a + 7b + 3b$ $(1 + 2)a + (7 + 3)b$ — distributivité de la multiplication sur l'addition $3a + 10b$ — fermeture de l'addition A noter qu'il n'est pas nécessaire d'exiger les justifications. Toutefois une bonne compréhension des propriétés mises en cause est requise. Ce travail de transformations d'une expression s'appelle souvent par abus "réduction de termes semblables". Il vaudrait mieux parler de réduction de l'expression. Il peut arriver, comme c'est le cas dans l'exemple précédent, que la connaissance des techniques de mise en évidence soit nécessaire. L'enseignant devra présenter ces techniques à l'élève afin de lui

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.2.1 TROUVER l'expression équivalente la plus simple à une expression algébrique donnée (suite).	III	fournir les outils nécessaires à la recherche d'expressions équivalentes plus simples. Il ne faudrait pas oublier que mettre en évidence, c'est appliquer la propriété de distributivité: $a(b + c) = ab + ac$ et $ab + ac = a(b + c)$ car l'égalité est une relation symétrique. Exemple 2: $2(x + 4) - 26 = x + 12$ distributivité de la multiplication sur l'addition $2x + 8 - 26 = x + 12$ $2x - 18 = x + 12$ fermeture de l'addition $-x + 2x - 18 = -x + x + 12$ stabilité $x - 18 = 0 + 12$ fermeture de l'addition

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.2.1 TROUVER l'expression équivalente la plus simple à une expression algébrique donnée (suite).	III	$x - 18 = 12$ neutre par l'addition $x - 18 + 18 = 12 + 18$ stabilité $x + 0 = 30$ fermeture de l'addition $x = 30$ neutre pour l'addition Cette dernière équation est certes la plus simple. Exemple 3: $-3x + 7 \leq 13$ stabilité $-3x + 7 - 7 \leq 13 - 7$ fermeture de l'addition $-3x + 0 \leq 6$ neutre pour l'addition $-3x \leq 6$ simplifiabilité $\frac{-1}{3} \times -3x \geq \frac{-1}{3} \times 6$ fermeture de l'addition $1x \geq -2$ neutre pour la multiplication $x \geq -2$ Pour les deux derniers exemples la recherche de l'expression la plus simple implique la connaissance des règles de stabilité, de simplifiabilité, la connaissance des axiomes d'ordre, la connaissance des propriétés des opérations d'addition et de multiplication (commutativité, associativité, neutre, symétrique, distributivité et fermeture).

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.2.1 TROUVER l'expression équivalente la plus simple à une expression algébrique donnée (suite).	III	

- Afin que l'élève saisisse mieux le rôle de x, on peut lui demander d'évaluer la forme propositionnelle $3x + 5 < -9x - 8$ pour plusieurs valeurs de x et d'indiquer si la proposition obtenue est vraie ou fausse.

x	3x + 5	<	-9x - 8	Propositions
-3	-4	<	19	vraie
-2,3	-1,9	<	12,7	vraie
-1,5	0,5	<	5,5	vraie
2	11	<	-26	fausse
18	59	<	-170	fausse

Pour évaluer chacun des membres de l'équation, on peut utiliser les procédures:

[×] 3 [=] [+] 5 [=] et [×] 9 [+/-] [=] [-] 8 [=]

La commande [=] a pour but de séparer les procédures partielles. Cet exercice contribuera à une meilleure compréhension du concept de variable.

- De plus, si on présume équivalentes les formes propositionnelles suivantes:

$$3x + 5 < -9x - 8$$
$$3x + 9x + 5 < -9x + 9x - 8$$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.2.1 TROUVER l'expression équivalente la plus simple à une expression algébrique donnée (suite).	III	$12x + 5 < 0 - 8$ $12x + 5 < -8$ $12x + 5 - 5 < -8 - 5$ $12x + 0 < -13$ $12x < -13$ $x < \frac{-13}{12}$ $x < -1,08\overline{3}$ il est possible de demander à l'élève de vérifier que, pour une même valeur de x, elles sont toutes vraies ou toutes fausses. Elles sont toutes vraies si on remplace x par un nombre plus petit que $-1,08\overline{3}$ et toutes fausses si x prend une valeur plus grande ou égale à $-1,08\overline{3}$. Il importe de faire remarquer à l'élève que deux formes propositionnelles peuvent être vraies pour une même valeur de x sans qu'elles soient équivalentes. Les formes propositionnelles $3x + 5 < 17$ et $3x < 17 + 5$ sont vraies pour $x = 3$ mais elles ne sont pas équivalentes. - D'une façon générale, lorsqu'on demande de trouver des expressions équivalentes à une expression donnée, on peut utiliser avec une calculatrice le moyen de vérification suivant:

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.2.1 TROUVER l'expression équivalente la plus simple à une expression algébrique donnée (suite).	III	La simplification de $a + 7a - b + 2b - a - 3b + a - b$ étant $8a - 3b$ Si les deux expressions sont équivalentes, en remplaçant a et b par deux valeurs quelconques on doit trouver le même résultat. Si on n'obtient pas la même réponse, on peut vérifier chaque étape intermédiaire et trouver à quel endroit on a fait une erreur. - L'utilisation de la calculatrice devrait inciter à appliquer le principe de vérification particulièrement dans des situations réalistes. - Il est important de se limiter à l'étude de polynômes simples car il faut se rappeler, principalement lors des opérations de multiplication ou de division sur les polynômes, que l'élève n'a pas une grande expérience du travail sur les exposants. - En deuxième secondaire, l'élève a dû faire la connaissance des deux lois suivantes: $\forall b \in \mathbb{Z}^*, \forall m, n \in \mathbb{Z} : b^m \cdot b^n = b^{m+n}$ (objectif 3.1.5) $\forall b \in \mathbb{Z}^*, \forall m, n \in \mathbb{Z} : \frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$ (objectif 3.1.6)

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.2.1 TROUVER l'expression équivalente la plus simple à une expression algébrique donnée (suite).	III	ou tout au moins appliquer la définition de puissance $3a^2 \times 7a = 3aa \times 7a = 3 \times 7 \times aaa = 21a^3$ $\frac{18b^3}{6b^2} = \frac{18bbb}{6bb} = \frac{{}^{3}\cancel{18}b\cancel{b}\cancel{b}}{{}_{1}\cancel{6}\cancel{b}\cancel{b}} = 3b$ - Il serait important de faire découvrir à l'élève la loi $\forall b \in \mathbb{Z}^* : b^0 = 1$ à partir d'exemples qui appliquent la deuxième loi et la définition de puissance. Ainsi $\frac{b^3}{b^3} = b^{3-3} = b^0$ deuxième loi sur les exposants $\frac{b^3}{b^3} = \frac{bbb}{bbb} = 1$ définition de puissance d'où $b^0 = 1$ par transitivité de l'égalité. - L'étude exhaustive sur les polynômes et la théorie des exposants sera effectuée dans le cours à option: "option I". On doit donc se limiter ici à des expressions simples.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.2.2 IDENTIFIER la ou les règle(s) utilisée(s) pour isoler l'inconnue dans une expression algébrique du premier degré à une variable.	III	- On peut relever comme règles: . la stabilité: - on peut ajouter ou retrancher une même quantité à chaque membre d'une équation ou d'une inéquation; . la simplifiabilité: - on peut multiplier ou diviser chaque membre d'une équation par une même quantité; - on peut multiplier ou diviser chaque membre d'une inéquation par une même quantité positive; - on change l'ordre quand on multiplie ou divise chaque membre d'une inéquation par une quantité négative non nulle. Exemples: a) $-3x + 7 \leq 13$ $-3x \leq 6$ $x \geq -2$ b) $-3x + 7 \leq 13$ (1) $(-3x + 7) \leq 13$ (2) $(-3x + 7) - 7 \leq 13 - 7$ (3) $-3x + 7 - 7 \leq 13 - 7$ (4) $-3x + (7 - 7) \leq 13 - 7$ (5)

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.2.2 IDENTIFIER la ou les règle(s) utilisée(s) pour isoler l'inconnue dans une expression algébrique du premier degré à une variable (suite).	III	$-3x + 0 \leq 6$ (6) $-3x \leq 6$ (7) $(-3x) \leq 6$ (8) $(-1/3) \times (-3x) \geq (-1/3) \times 6$ (9) $(-1/3 \times -3)x \geq (-1/3 \times 3) \times 2$ (10) $+1x \geq 1 \times 2$ (11) $+x \geq -2$ (12) En a) l'élève utilise une méthode abrégée ne conservant en fait que les étapes (1), (7) et (12) de la solution détaillée en b). Cette méthode rappelle les deux "règles célèbres" suivantes: - on change de bord, on change de signe; - on change le sens de l'inéquation (de l'ordre) lorsqu'on multiplie (ou divise) chaque membre par un nombre négatif non nul. L'expression "on change de bord, on change de signe" signifie qu'on effectue l'opération réciproque.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.2.3 EXPRIMER en extension ou en compréhension l'ensemble-solution d'une forme propositionnelle du premier degré à une variable.	III	- La recherche de l'ensemble-solution présuppose la détermination de l'ensemble référentiel. Ainsi pour une forme propositionnelle telle que "x est le maire de ..." tout ensemble "référentiel" du genre l'ensemble des planètes, l'ensemble des mois de l'année, etc. va produire un ensemble de propositions fausses car aucune valeur de ces ensembles n'est solution de cette forme propositionnelle. Le choix d'un ensemble référentiel se doit d'être judicieux. Ainsi, il ne serait pas pertinent de choisir $\mathbb{Z}$ comme ensemble référentiel pour l'équation $5x + 4 = 3x + 7$. - L'élève devrait travailler généralement avec l'ensemble des nombres réels comme référentiel. - L'ensemble-solution de $5x + 4 = 3x + 7$ est $\left\{\frac{3}{2}\right\}$. Il faut exiger que l'élève réponde bien à l'objectif. Ainsi $\frac{3}{2}$ serait une réponse inacceptable car on demande de trouver l'ensemble-solution et non la solution de l'équation. - La calculatrice peut être utilisée pour rechercher l'ensemble-solution d'une équation de la forme $ax + b = c$. En effet, l'équation équivalente la plus simple est $x = \frac{c - b}{a}$ et l'ensemble-solution $\left\{\frac{c - b}{a}\right\}$. Ainsi, en évaluant $\frac{c - b}{a}$ à l'aide de la calculatrice, il est possible de trouver rapidement la solution recherchée.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.2.3 EXPRIMER en extension ou en compréhension l'ensemble-solution d'une forme propositionnelle du premier degré à une variable (suite).	III	- Un autre procédé, celui de la balance romaine, permet de résoudre une équation en recherchant une bonne approximation de la valeur de la variable x. Soit l'équation 5x - 4 = 2x + 6. Si l'on convient qu'un plateau contient 5x - 4 et que l'autre renferme 2x + 6, alors en donnant une valeur à x, le comportement de la balance nous permet de trouver une autre valeur de x et ainsi de se rapprocher petit à petit de la valeur correspondant à la situation d'équilibre. Pour chaque valeur de x on calcule 5x + -4 et 2x + 6.

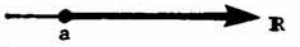
x	5x - 4	Fléau	2x + 6
-1	-9		4
0	-4		6
1	1		8
2	6		10
3	11		12
4	16		14
5	21		16

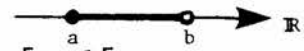
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.2.3 EXPRIMER en extension ou en compréhension l'ensemble-solution d'une forme propositionnelle du premier degré à une variable (suite).	III	A partir de x = 3 la balance change sa position d'équilibre; on recommence un tableau du même genre mais avec des valeurs comprises entre 3 et 4.

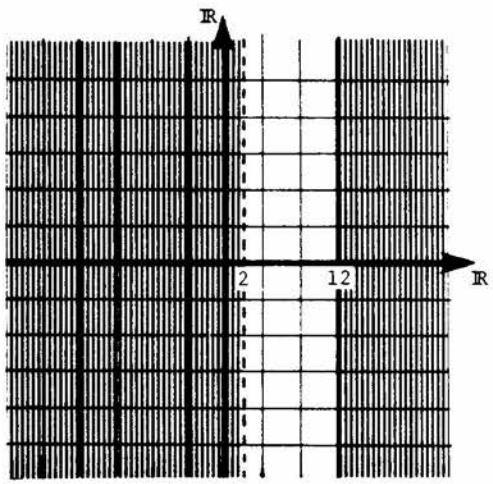
x	5x - 4	Fléau	2x + 6
3,0	11,0		12,0
3,1	11,5		12,2
3,2	12,0		12,4
3,3	12,5		12,6
3,4	13,0		12,8
3,5	13,5		13,0

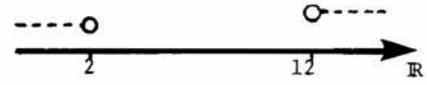
A partir de 3,4 la balance change sa position d'équilibre; on continue avec un nouveau tableau, en utilisant des valeurs comprises entre 3,30 et 3,40. Et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on décide que l'approximation de la réponse est satisfaisante, par exemple au millième près, soit 3,333.

On demandera aux élèves de trouver des procédés de vérification de leurs calculs. Dans ce cas, l'utilisation des composées de procédures réciproques sera tout indiquée . La procédure B étant la réciproque de A.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.2.3 EXPRIMER en extension ou en compréhension l'ensemble-solution d'une forme propositionnelle du premier degré à une variable. (suite)	III	- Un programme BASIC permettant de trouver la solution d'une équation du premier degré à une inconnue pourrait s'écrire: 10 CLS 20 INPUT "Introduis les valeurs associées aux coefficients de Ax+B=C"; A, B, C 30 IF C-B=0 THEN IF A=0 THEN PRINT "Il y a une infinité de solutions." ELSE PRINT "Il n'y a pas de solution." 40 IF A=0 THEN STOP ELSE X=(C-B)/A 50 PRINT "La solution de cette équation est"; X 60 END
1.2.4 REPRESENTER graphiquement une forme propositionnelle du premier degré à une variable.	III	- Il serait important de présenter à l'élève la notion d'intervalle. Ainsi $\forall a, x \in \mathbb{R} : x \geq a$ est représenté par  est noté par $[a, +\infty$ $\forall a, x \in \mathbb{R} : x > a$ est représenté par est noté par $]a, +\infty$ $\forall a, x \in \mathbb{R} : x \leq a$ est représenté par est noté par $-\infty, a]$ $\forall a, x \in \mathbb{R} : x < a$ est représenté par est noté par $-\infty, a[$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.2.4 REPRESENTER graphiquement une forme propositionnelle du premier degré à une variable (suite).	III	$\forall a, b, x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b$ est représenté par est noté par $[a, b]$ $\forall a, b, x \in \mathbb{R} : a < x \leq b$ est représenté par est noté par $]a, b]$ $\forall a, b, x \in \mathbb{R} : a \leq x < b$ est représenté par est noté par $[a, b[$  $\forall a, b, x \in \mathbb{R} : a < x < b$ est représenté par est noté par $]a, b[$ - La représentation sur une droite de la forme propositionnelle "$x < 2$ et $x \geq 12$" est ou - Outre cette représentation, il est maintes fois avantageux de représenter dans le plan cartésien une forme propositionnelle du premier degré à une variable. On peut, pour les besoins de la cause, juger équivalentes les formes propositionnelles "$x < 2$ et $x \geq 12$" et

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.2.4 REPRESENTER graphiquement une forme propositionnelle du premier degré à une variable (suite).	III	"$x + 0y < 2$ et $x + 0y \geq 12$" et sa représentation dans le plan est  - Les deux représentations montrent bien que l'ensemble-solution est vide. Il serait intéressant de faire prendre conscience à l'élève que les représentations graphiques précédentes sont celles associées à la forme propositionnelle et non celles de son ensemble-solution. - Il serait possible, en extrapolant, de tracer une représentation dans l'espace, $x < 2$ étant associée à $x + 0y + 0z < 2$ et $x \geq 12$ à $x + 0y + 0z \geq 12$.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.2.5 REPRESENTER graphiquement l'ensemble-solution d'une forme propositionnelle du premier degré à une variable.	III	- Soit $x < 2$ et $x \geq 12$ une forme propositionnelle qui se représente graphiquement par: - L'examen du graphique ci-dessus révèle que l'ensemble-solution est vide car aucune valeur ne satisfait la condition. On représente cet ensemble-solution par:  ou on signale par le symbole $\emptyset$ ou { } que l'ensemble-solution est vide. On trouvera à la page suivante un tableau de quelques situations.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.2.5 REPRESENTER graphiquement l'ensemble-solution d'une forme propositionnelle du premier degré à une variable (suite).	III	

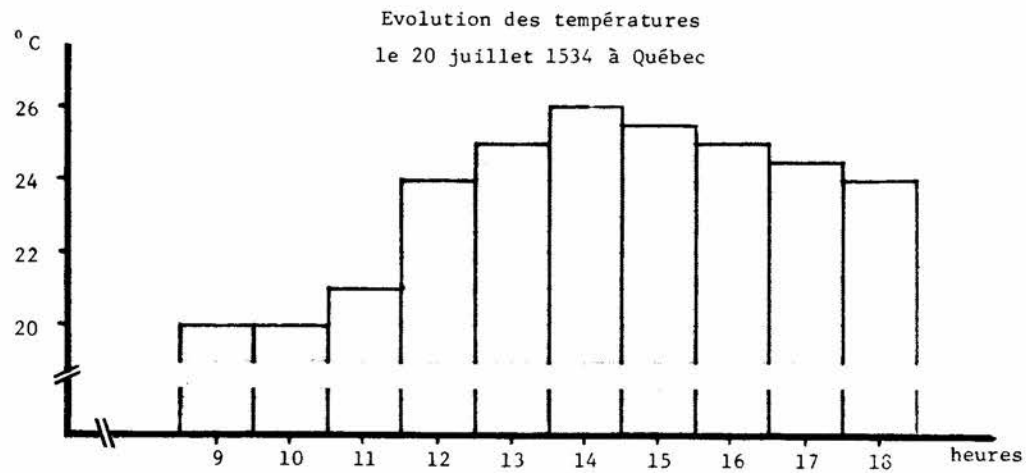
Formes propositionnelles	Situations intermédiaires	Solutions
$x > 2$	2 12 ℝ	2 12 ℝ
$x \geq 2$ et $x > 12$	2 12 ℝ	2 12 ℝ
$x \leq 2$ et $x < 12$	2 12 ℝ	2 12 ℝ
$x \geq 2$ et $x < 12$	2 12 ℝ	2 12 ℝ

- Il est important que l'élève fasse la distinction entre la représentation d'une forme propositionnelle et celle de son ensemble-solution.

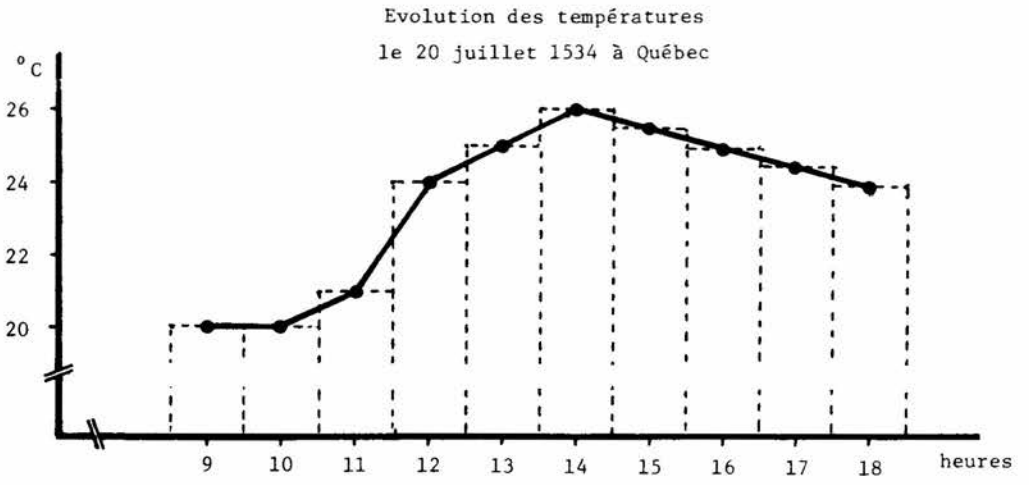
OBJECTIF TERMINAL 1.3 RESOUDRE des problèmes de la vie courante se traduisant par une fonction constante ou affine.

Le concept de fonction est l'un des concepts mathématiques le plus utilisé dans notre monde de plus en plus influencé par les nombreuses innovations technologiques. Cet objectif vise donc à introduire ce concept et à développer chez l'élève l'habileté à le découvrir dans des situations diverses afin de pouvoir les mieux comprendre, les comparer et les résoudre avec une plus grande facilité.

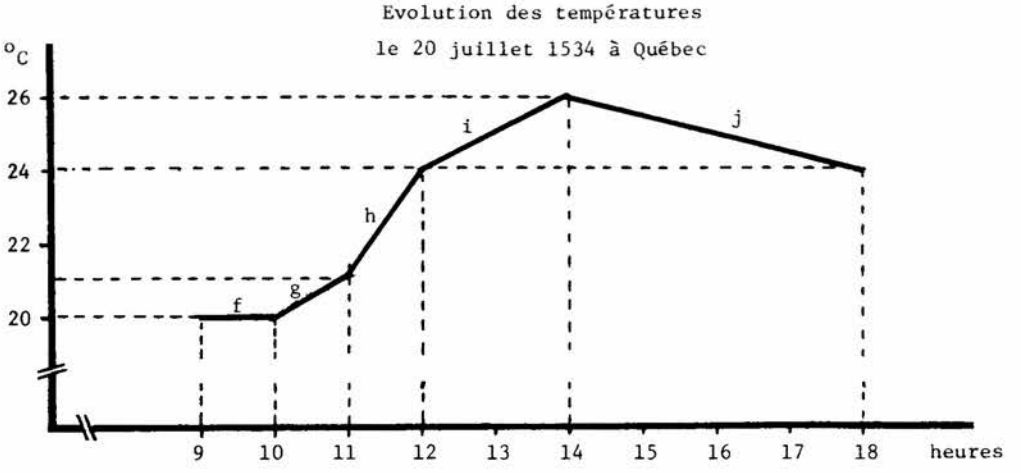
L'étude de ce sujet n'implique pas obligatoirement la possession de notions ensemblistes, la connaissance du produit cartésien et du concept de relation mais se fonde sur l'observation à partir de la représentation graphique (représentation cartésienne) du phénomène étudié afin d'en faire ressortir les caractéristiques fondamentales. Ainsi, de l'histogramme représentant l'évolution de la température le 20 juillet 1534 à Québec,



il est possible de construire le diagramme à ligne brisée ci-dessous.



Il est alors permis de définir les fonctions f, g, h, i et j en restreignant le domaine des fonctions de façon appropriée.



Il devient alors possible d'évaluer le taux de variation associée à chacune de ces fonctions:

Fonctions	Domaines	Taux de variation	
f	$9 \leq x \leq 10$	$\frac{20 - 20}{10 - 9} = \frac{0}{1} = 0$	0
g	$10 \leq x \leq 11$	$\frac{21 - 20}{11 - 10} = \frac{1}{1} = 1$	+1
h	$11 \leq x \leq 12$	$\frac{24 - 21}{12 - 11} = \frac{3}{1} = 3$	+3
i	$12 \leq x \leq 14$	$\frac{26 - 24}{14 - 12} = \frac{2}{2} = 1$	+1
j	$14 \leq x \leq 18$	$\frac{24 - 26}{18 - 14} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Remarquer qu'une augmentation de la température est associée à une pente (un accroissement, un taux de variation) positive et qu'inversement, un abaissement de la température correspond à une pente négative. De plus, la valeur absolue du taux de variation indique la rapidité avec laquelle s'est effectuée cette variation de température.

Cet objectif terminal est riche en applications. Il est donc avantageux d'utiliser des situations très diversifiées puisées dans la vie courante de l'élève, du monde de la consommation, des sciences pures, des techniques et des sciences humaines ou appliquées.

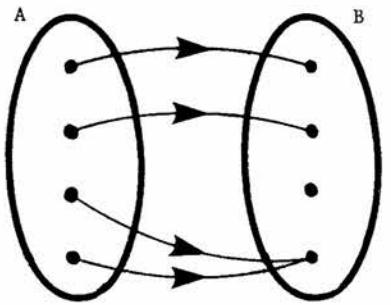
L'étude de ces fonctions ne doit pas se dissocier de l'analyse de leurs représentations graphiques et du réel d'où elles sont issues. Le schéma "mathématiser une situation, opérer

sur le modèle ainsi obtenu et interpréter les résultats" est à privilégier. Il est conseillé de développer chez l'élève l'habileté à utiliser différentes heuristiques reliées à la résolution de problème.

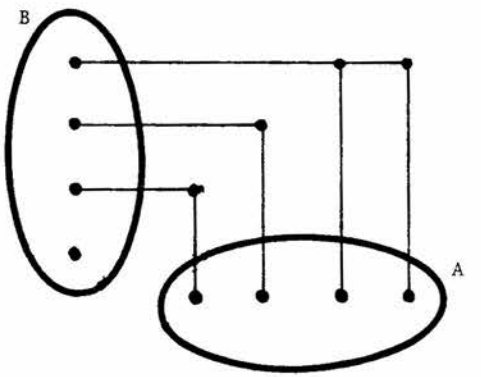
L'usage de la calculatrice de poche est grandement encouragé afin d'accélérer le tracé des graphiques et le calcul des taux de variation. Il est de plus suggéré d'exiger de l'élève une grande précision dans le tracé de ses graphiques.

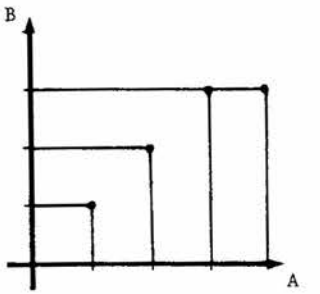
Les notes didactiques complémentaires présentent d'autres informations sur les fonctions affines et quelques exemples d'applications susceptibles d'orienter l'investigation vers la recherche de "fonctions utiles".

Dans son Dictionnaire des mathématiques, Bouvier décrit une fonction comme étant "synonyme d'application". Ce guide pédagogique véhicule cette conception. Pour l'enseignant, il est bon de préciser qu'une fonction est une relation pour laquelle tout élément x de son domaine est associé à un unique élément y de son image tel que $(x, y) \in f$. Soient A et B deux ensembles, une fonction f sera définie de A vers B ssi $\forall x \in A, \exists_1 y \in B: \forall (x, y) \in f$. Graphiquement, il est possible d'obtenir des représentations telles:



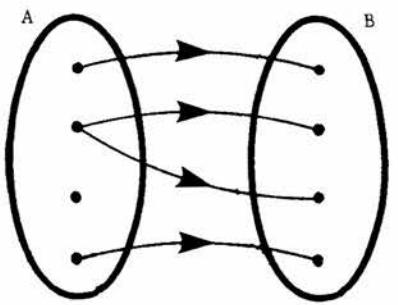
graphique sagittal

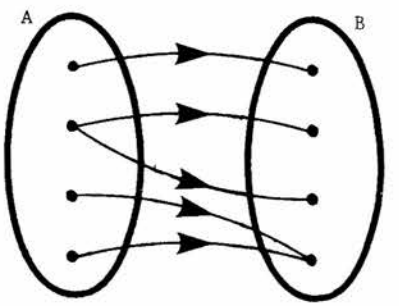


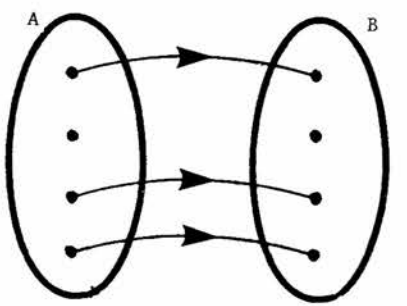


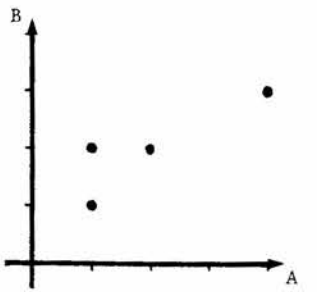
graphiques cartésiens (réseaux)

Des situations telles:

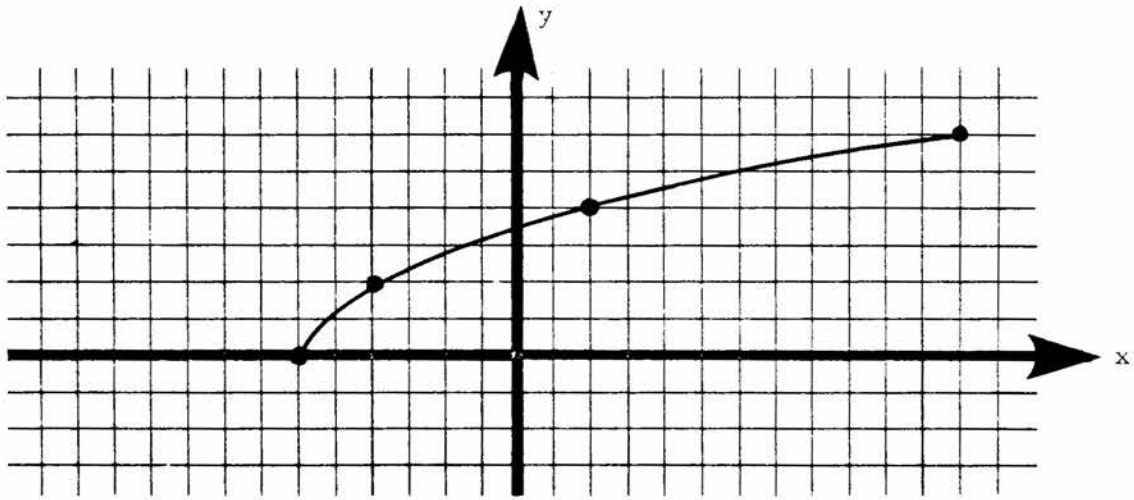








ne représentent pas des fonctions; ce sont des relations. Cependant, le graphique cartésien de la page suivante est généralement considéré comme une fonction, le domaine étant implicitement donné par la représentation graphique.



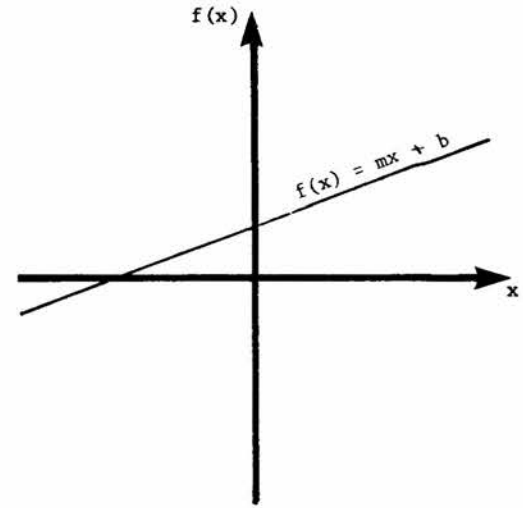
Ici, le domaine de cette fonction racine carrée est $[-3, +\infty[$ et cette fonction peut se définir à l'aide de la règle de correspondance:

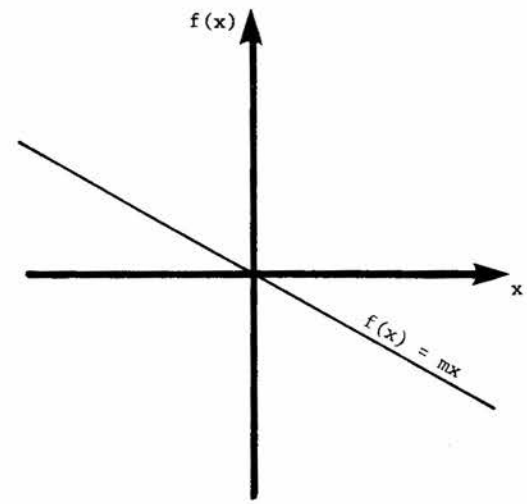
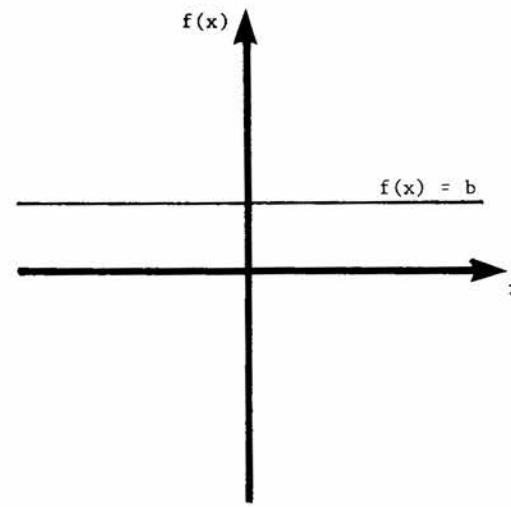
$$f : [-3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt{x + 3}$$

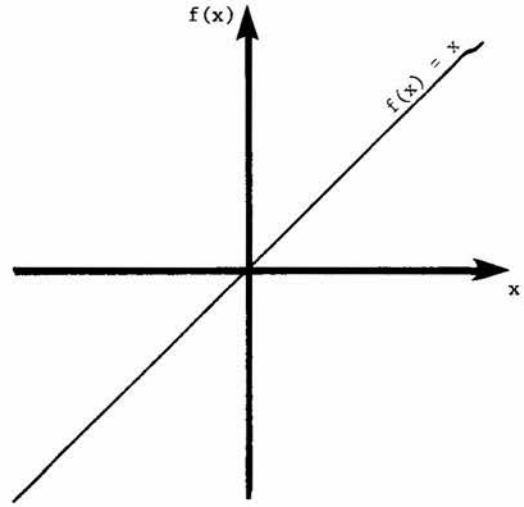
Il serait faux de définir celle-ci comme étant une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Sur le plan didactique, au niveau secondaire, il ne semble pas y avoir d'avantages à distinguer fonction et application relativement au domaine. On suggère donc fortement à l'enseignant de ne pas faire cette nuance afin de faciliter chez l'élève la formation univoque du concept de fonction.

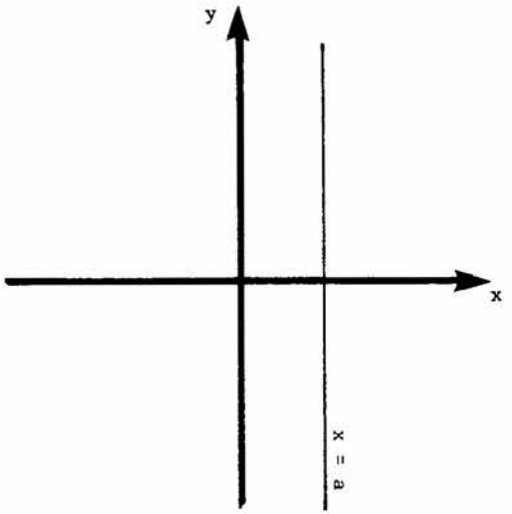
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.1 IDENTIFIER des fonctions constantes ou affines.	IV	- Avant d'introduire ce sujet, il serait bon de rappeler à l'élève le vocabulaire relatif à la représentation cartésienne. Au premier cycle du secondaire, l'élève a appris à "REPERER un objet sur une surface" (objectif terminal 4.5). Voici une liste des principaux termes: - plan cartésien, - axe des "x" (des abscisses), - axe des "y" (des ordonnées), - origine, - couple, - abscisse d'un couple, - ordonnée d'un couple, - coordonnées d'un couple. - Une fonction constante ou une fonction du premier degré est représentée dans le plan cartésien par une droite non parallèle à l'axe des "y". - La forme générale de ce type de fonction est donnée par: $f(x) = mx + b$ où x est la variable indépendante; $f(x)$ est la variable dépendante ($f(x) = y$); m est la pente ou le taux de variation; b est l'ordonnée à l'origine;

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.1 IDENTIFIER des fonctions constantes ou affines (suite).	IV	et sa représentation graphique est une droite dans le plan cartésien. Dans $f(x) = mx + b$, x et $f(x)$ sont des variables tandis que m et b sont des paramètres. Les paramètres m et b déterminent une droite d'une famille de droites (faisceau ou direction); x et $f(x)$ désignent les points $(x, f(x))$ de cette droite. - Si $m \neq 0$ et $b \neq 0$, la fonction $f(x) = mx + b$ est représentée dans le plan par une droite qui ne passe pas par l'origine. Cette fonction polynomiale est dite affine.

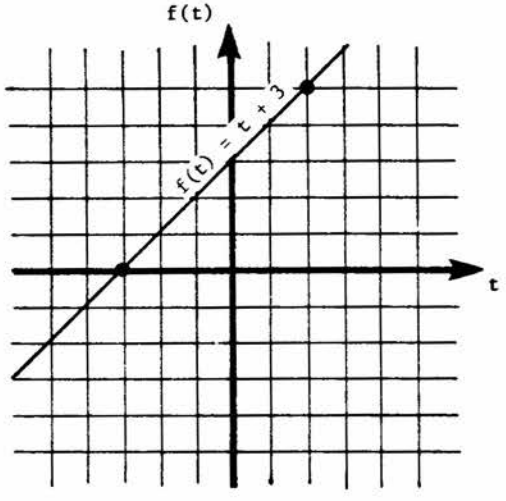


OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.1 IDENTIFIER des fonctions constantes ou affines (suite).	IV	- Si $m \neq 0$ et $b = 0$, la fonction $f(x) = mx + b$ devient $f(x) = mx$ et sa représentation graphique est une droite passant par l'origine. Cette fonction est dite de variation directe ou linéaire. Cette fonction linéaire est un cas particulier de la fonction affine. 
		- Si $m = 0$ et $b \neq 0$, la fonction $f(x) = mx + b$ devient $f(x) = b$ et sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des "x". Cette fonction est appelée fonction constante. Elle est de degré zéro. 

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.1 IDENTIFIER des fonctions constantes ou affines (suite).	IV	- Si m = 1 et b = 0, la fonction f(x) = mx + b devient f(x) = x et sa représentation graphique est une droite bissectrice de l'angle formé par l'axe des "x" et celui des "y" dans le premier quadrant. Cette fonction est appelée fonction identité. Cette fonction linéaire est un cas particulier de la fonction affine.  - A la suite d'un certain nombre d'évaluations, on fera remarquer à l'élève qu'une valeur de "x" permet de découvrir une et une seule valeur de "f(x)". C'est cette caractéristique qui permet d'affirmer que f(x) = mx + b est une fonction.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.1 IDENTIFIER des fonctions constantes ou affines (suite).	IV	- Dans le graphique cartésien ci-contre, à une valeur de "x" correspond une infinité de valeurs pour "y". Le graphique n'est donc pas celui d'une fonction. 
		- L'identification d'une fonction affine peut se faire à partir: - de son graphique cartésien, - de son équation. - d'une mise en situation.
		- Voici une situation. Un coureur possède une bicyclette dont le diamètre de la roue avant est de 66 cm. A une certaine vitesse, il lui faut 1,74 m pour s'immobiliser après avoir bloqué les deux roues. Quelle distance

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.1 IDENTIFIER des fonctions constantes ou affines (suite).	IV	totale parcourt-il pour un nombre de tours de roues donné? Cette fonction est affine: $f(t) = 66\pi t + 174$ où: t indique le nombre de tours de roue; f(t) donne la distance totale exprimée en fonction du nombre de tours de roue; 174 car 1,74 m = 174 cm. - Un programme BASIC utilisant des branchements conditionnels multiples peut permettre d'identifier les diverses sortes de fonctions. 10 CLS 20 INPUT "Introduis les valeurs de m et de b dans f(x)=mx+b"; M, B 30 IF M≠0 THEN GOTO 50 ELSE PRINT "Cette fonction est constante". 40 STOP 50 IF B=0 THEN PRINT "C'est une fonction de variation directe ou linéaire". ELSE PRINT "C'est une fonction affine". 60 END
1.3.2 DETERMINER l'image d'une valeur donnée du domaine par une fonction constante ou affine.	IV	- Il est possible de définir le domaine d'une fonction comme l'ensemble des valeurs que l'on attribue à la variable indépendante d'une fonction. - Dans le cas des fonctions affines, le domaine peut être l'ensemble des nombres réels.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.2 DETERMINER l'image d'une valeur donnée du domaine par une fonction constante ou affine (suite).	IV	- Il est important de signaler à l'élève que le couple (x, y) peut également prendre la forme (x, f(x)). - L'évaluation d'une fonction affine peut se faire à partir: - de son graphique cartésien "Evaluer f(t) pour t = 2". Réponse: 5. Cette évaluation est souvent imprécise si l'équation associée au graphique n'est pas fournie.  - de son équation "Evaluer f(t) = $2\pi r t$ + 174 pour t = 250, $\pi \approx 3{,}14$ et r = 33". Réponse: f(250) = 51 984 car 2 × 3,14 × 33 × 250 + 174 = 51 984. - d'une mise en situation: Un coureur possède une bicyclette dont le diamètre de la roue avant est de 66 cm. A une certaine vi-

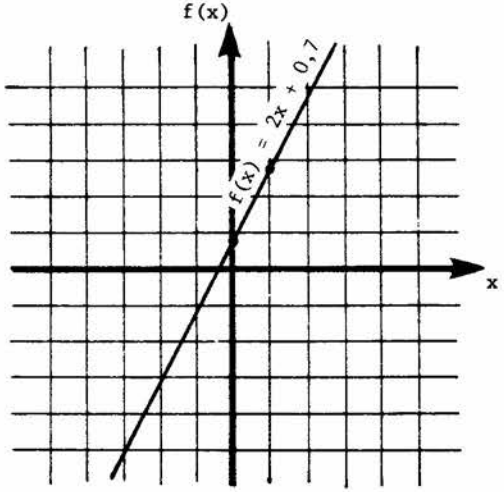
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.2 DETERMINER l'image d'une valeur donnée du domaine par une fonction constante ou affine (suite).	IV	tesse, il lui faut 1,74 m pour s'immobiliser après avoir bloqué les deux roues. Quelle distance totale parcourt-il si la roue avant fait 400 tours? $f(t) = 66\pi t + 174$ $f(400) \approx 83\ 070$ car $66 \times 3{,}14 \times 400 \times 174 = 83\ 070$. Réponse: Le cycliste parcourt une distance de 83 070 ou 0,83 km. Lorsque l'évaluation d'une fonction se fait à partir d'une mise en situation, il est très important d'exiger que l'élève interprète la valeur numérique obtenue. - Voici une situation où la calculatrice est fort utile. Un vase contient 58 cm^3 d'huile dont la masse est de 46,4 g. Compléter le tableau de correspondance suivant.

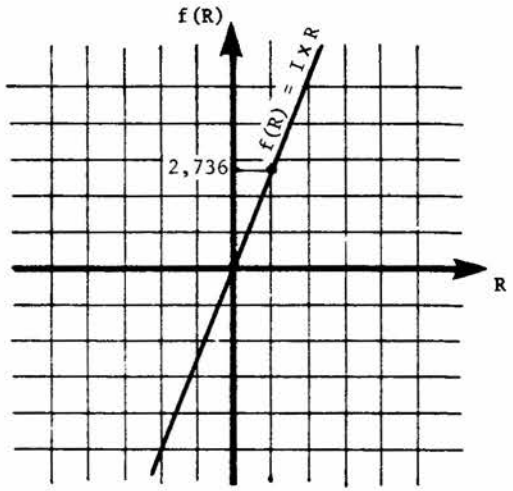
Volume d'huile en cm^3	1	2,5	17,5	34,5	58	79	83
Masse d'huile en g					46, 4		

On peut mettre en mémoire le coefficient de linéarité (la pente obtenue par le quotient masse/volume: $\frac{46{,}4}{58} = 0{,}8$) à l'aide de la séquence

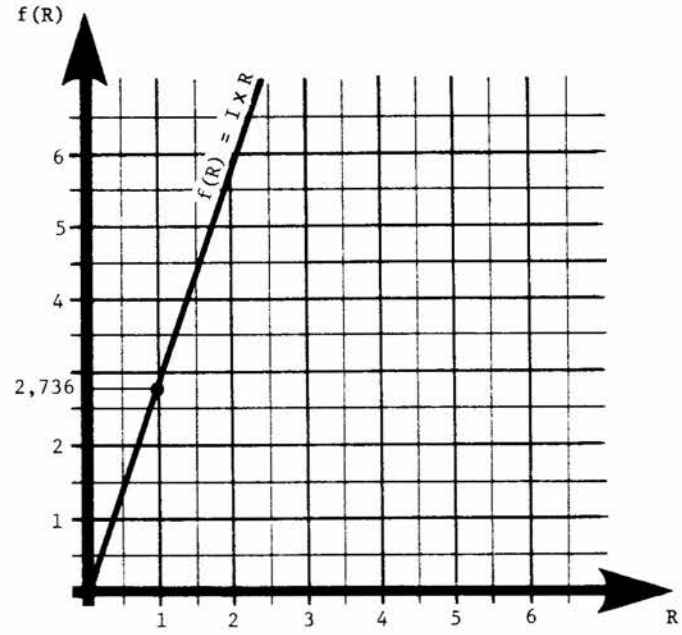
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.2 DETERMINER l'image d'une valeur donnée du domaine par une fonction constante ou affine (suite).	IV	46,4 [÷] 58 [M]. Pour compléter le tableau, on peut alors utiliser la procédure [ ] [×] [MR] [=], ou la procédure qui n'utilise pas la mémoire: P : [ ] [×] 0,8 [=]. - On pourra ensuite développer le concept de réciproque de fonction en utilisant la notion de procédure réciproque. Si f(a) = 14, la valeur de a est obtenue à l'aide de la procédure P^{-1} : [ ] [÷] 0,8 [=]. P^{-1} se découvre à partir des transformations suivantes: - à P : [ ] [×] 0,8, on associe la fonction f(x) = 0,8x; - en recherchant l'inverse de cette fonction, on obtient: $y = 0,8x$ $x = 0,8y$ $y = \frac{x}{0,8}$ $y = \frac{5x}{4}$ $f^{-1}(x) = \frac{5x}{4}$ - ce qui permet de trouver la procédure réciproque P^{-1}: [ ] [×] 5 [÷] 4 [=].

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.2 DETERMINER l'image d'une valeur donnée du domaine par une fonction constante ou affine (suite).	IV	- Voici un autre exemple: Soit g : $x \longmapsto 12{,}85x + 14{,}17$ A : [ ] [×] 12,85 [=] [+] 14,17 [=] est un exemple de procédure qui permet d'évaluer la fonction g pour une valeur quelconque. Il en existe d'autres, B : [ ] [STO] A [×] 12 [=] [+] 14 [=] [+] [RCL] A [×] 0,85 [+] 0,17 [=] (avec priorité des opérations). L'important est que l'élève comprenne que ces procédures évaluent la même fonction. Ainsi, $x \longmapsto 12{,}85x + 14{,}17$ (traduction de A) $x \longmapsto 12x + 14 + 0{,}85x + 0{,}17$ (traduction de B) sont des expressions différentes pour décrire la même fonction et les procédures qui leur sont associées ne sont que des moyens différents pour déterminer des images par cette même fonction. - Il est possible de demander à l'élève de préparer un programme qui évalue une fonction pour une certaine valeur de son domaine. En BASIC, ce programme pourrait être:

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.2 DETERMINER l'image d'une valeur donnée du domaine par une fonction constante ou affine (suite).	IV	10 CLS 20 INPUT "Indique les valeurs de m et de b dans la fonction f(x)=mx+b."; M, B 30 INPUT "Indique la valeur du domaine de cette fonction"; X 40 Y=M*X+B 50 PRINT "f("; X; ")="; Y 60 END
1.3.3 REPRESENTER graphiquement une fonction constante ou affine.	IV	- La représentation graphique peut se faire à partir: - de l'équation d'une fonction "Représenter graphiquement f(x) = 2x + 0,7". f(0) = 0 + 0,7 = 0,7 on obtient (0, 0,7) f(1) = 2 × 1 + 0,7 = 2,7 on obtient (1, 2,7) 

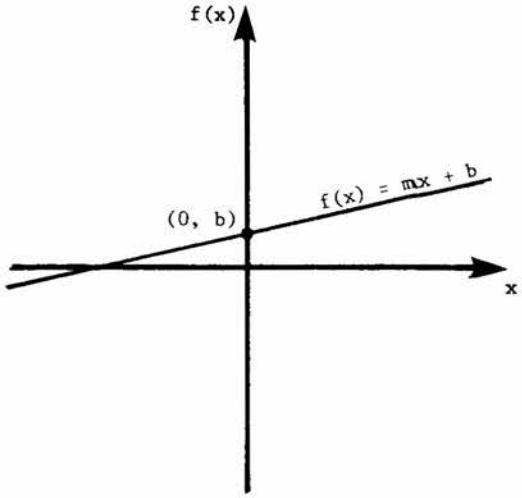
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.3 REPRESENTER graphiquement une fonction constante ou affine (suite).	IV	- d'une mise en situation "Le courant I d'un certain circuit électrique est de 2,736 ampères. Tracer la courbe représentant la tension (en volts) en fonction de la résistance R (en ohms). Cette fonction est définie par: $f(R) = I \times R$." 

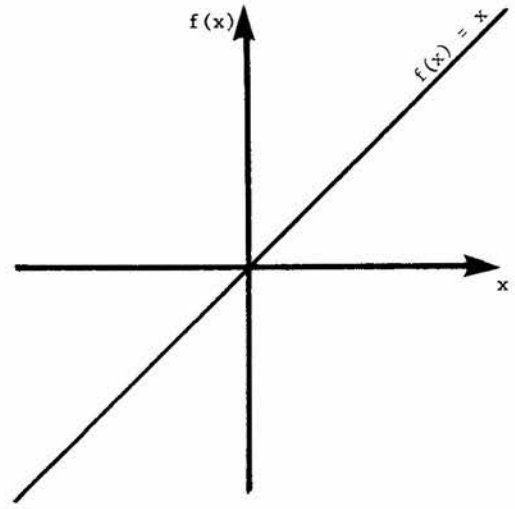
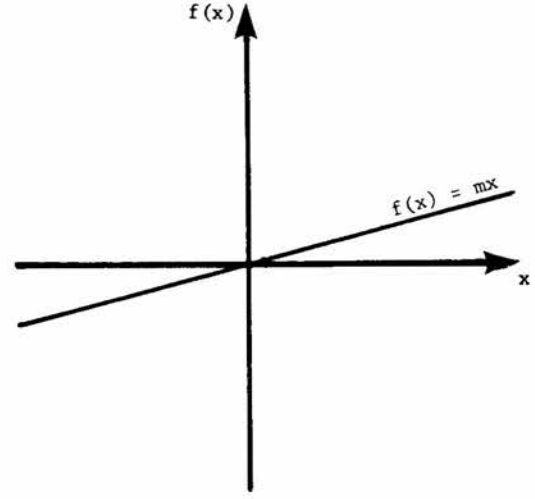
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.3 REPRESENTER graphiquement une fonction constante ou affine (suite).	IV	- Il faut noter que la représentation graphique associée à la grande majorité des situations puisées dans le domaine de la vie ou des sciences n'utilise que le premier quadrant du plan cartésien. Dans l'exemple cité plus haut, il est évident que la résistance ne peut avoir une valeur négative. f(R) est donc toujours positif et cette fonction pourrait se représenter par le graphique ci-contre.

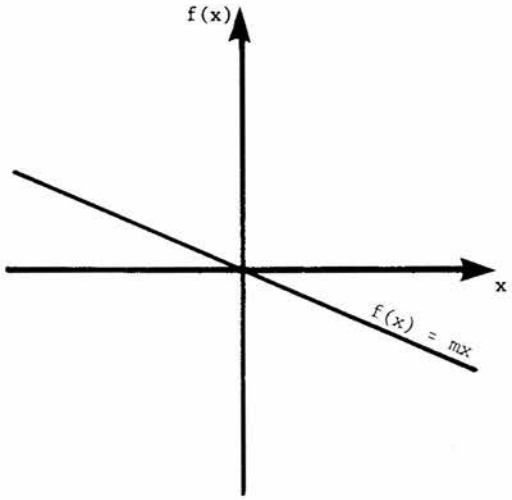
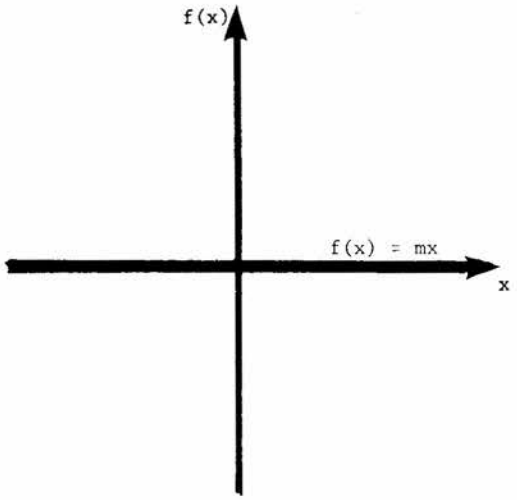
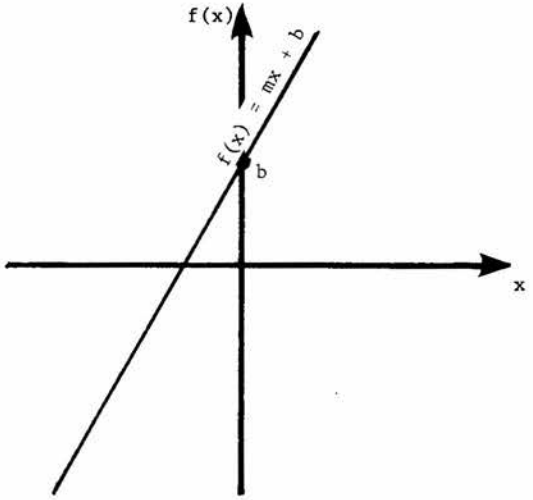


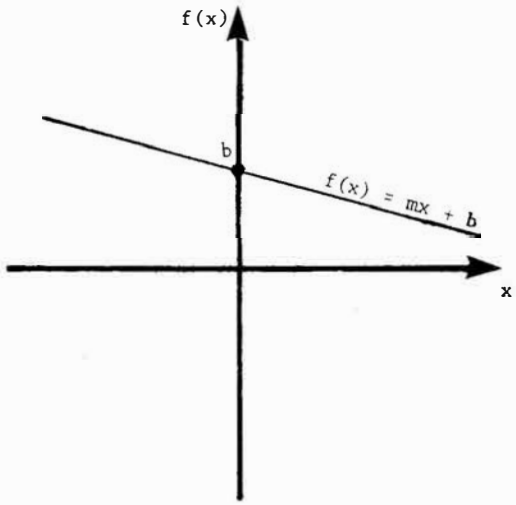
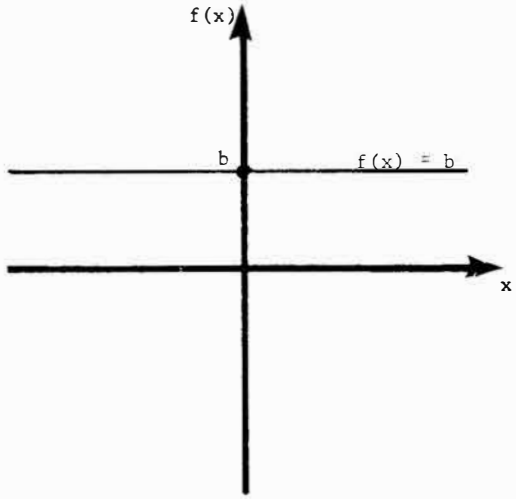
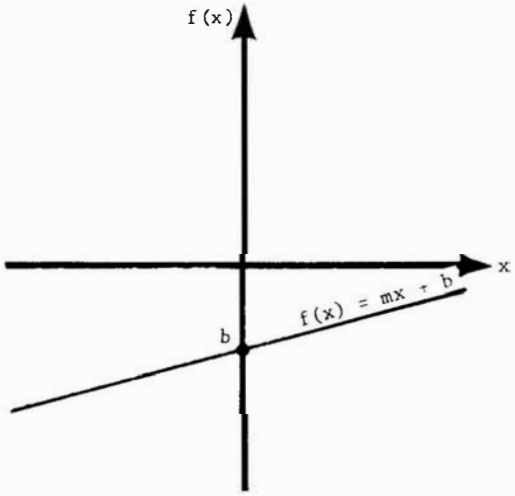
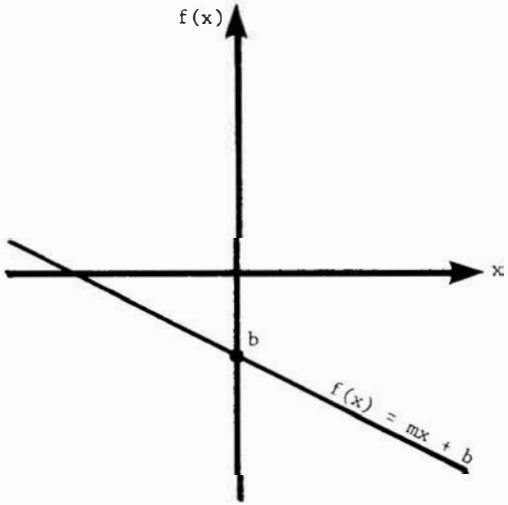
- A partir du commentaire précédent, il serait intéressant de signaler à l'élève que le modèle mathématique créé pour interpréter la réalité est souvent plus général (plus étendu) et qu'il faut alors se limiter à la partie significative du modèle.

- L'emploi systématique de la calculatrice pourrait faciliter l'évaluation de certaines fonctions affines et accélérer ainsi la construction

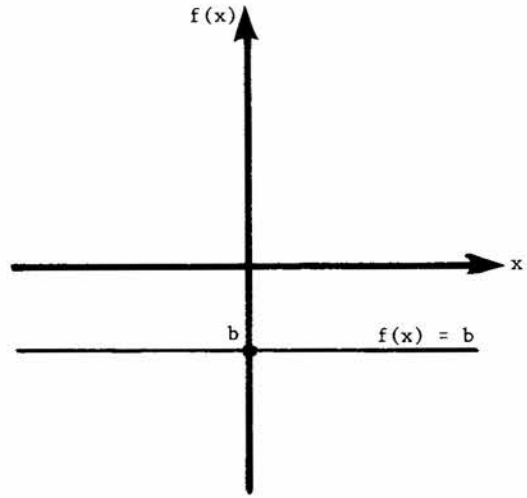
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.3 REPRESENTER graphiquement une fonction constante ou affine (suite).	IV	des représentations graphiques. Cet usage permettra également de présenter à l'élève des situations plus significatives. - Faire remarquer à l'élève que si l'on pose $x = 0$ dans $f(x) = mx + b$, il sera alors possible de déterminer l'endroit où la droite coupe l'axe des "y": $f(0) = m \times 0 + b$ $= 0 + b$ $= b$ Ce qui permet d'obtenir le couple (0, b). Sur la droite d'équation $f(x) = mx + b$, "b" est l'ordonnée à l'origine.  - Afin d'approfondir certaines caractéristiques des fonctions affines présentées précédemment, il serait intéressant de présenter à l'élève une suite d'activités qui pourraient ressembler à celles-ci:

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.3 REPRESENTER graphiquement une fonction constante ou affine (suite).	IV	a) tracer le graphique cartésien de la fonction identité; 
		b) tracer le graphique cartésien de la fonction linéaire (variation directe) ou constante; si m > 0 

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.3 REPRESENTER graphiquement une fonction constante ou affine (suite).	IV	si m < 0  si m = 0  c) tracer le graphique cartésien de la fonction affine ou constante; si m > 0, b > O 

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.3 REPRESENTER graphiquement une fonction constante ou affine (suite).	IV	si m < 0, b > 0  si m = 0, b > 0  si m > 0, b < 0  si m < 0, b < 0 

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.3 REPRESENTER graphiquement une fonction constante ou affine (suite).	IV	si m = 0, b < 0

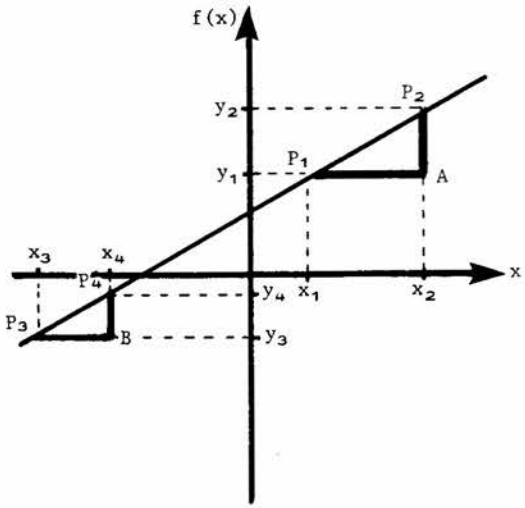


- Ces dernières activités doivent être effectuées à partir de valeurs numériques associées aux paramètres m et b. Le présent texte identifie les conclusions auxquelles l'élève doit aboutir.

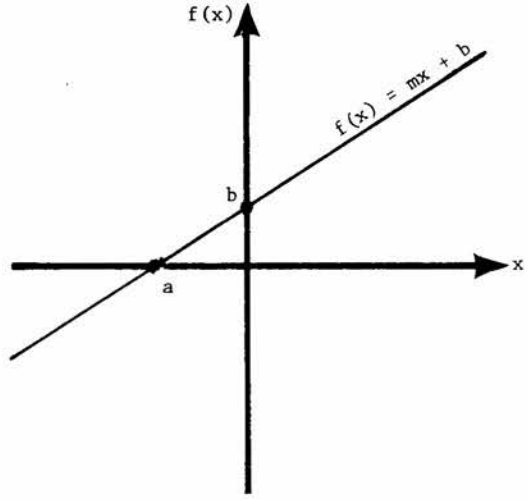
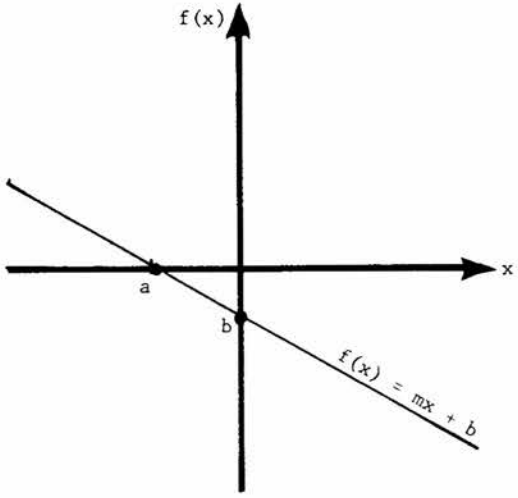
- Voici un programme BASIC permettant de tracer le graphique d'une fonction.

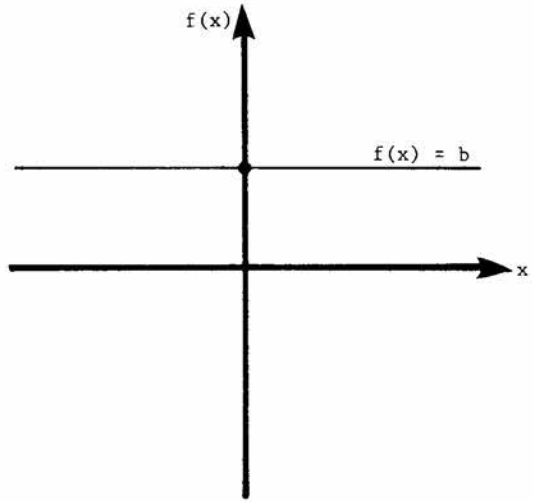
```
10 CLS
20 INPUT "Introduis les valeurs de m et de b dans f(x)=mx+b."; M, B
30 LPRINT CHR$ (31); CHR$ (27); CHR$ (14); CHR$ (27); CHR$ (56);
40 FOR Y=25 TO -25 STEP -1
50 FOR X=-25 TO 25
```

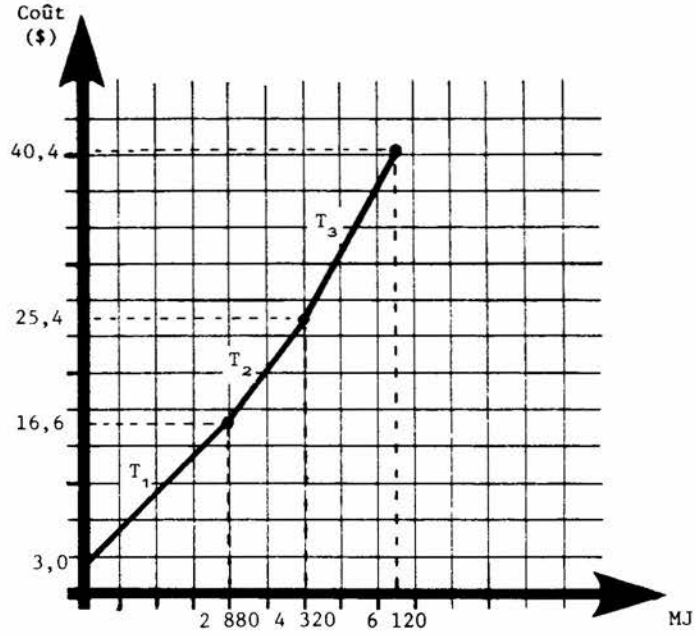
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.3 REPRESENTER graphiquement une fonction constante ou affine (suite).	IV	60 IF Y=M*X+B THEN LPRINT CHR$ (167); ELSE GOTO 80 70 GOTO 110 80 IF X=0 OR Y=0 THEN LPRINT CHR$ (250); ELSE GOTO 100 90 GOTO 110 100 LPRINT " "; 110 NEXT X 120 LPRINT " "; 130 NEXT Y 140 LPRINT CHR$ (27); CHR$ (15); CHR$ (30); CHR$ (27); CHR$ (54)
1.3.4 DETERMINER le taux de variation d'une fonction constante ou affine.	IV	- Dans l'étude des fonctions affines, parler de "taux de variation", c'est également parler de la pente mais en des termes plus dynamiques. En effet, le taux de variation est formé du quotient de deux variations (celle des x qui provoque celle des y). Cependant, ce rapport des variations des x et des y est constant sur un intervalle donné. Les commentaires qui suivent mettent en évidence ces caractéristiques. - Dans la fonction affine $f(x) = mx + b$, la variation des "x" s'exprime par $x_2 - x_1$ et la variation obtenue des "y" est donnée par $y_2 - y_1$. Si l'on fait le quotient de ces deux variations en écrivant: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ on obtient un taux (un rapport) de variation.



OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.4 DETERMINER le taux de variation d'une fonction constante ou affine (suite).	IV	- Faire remarquer à l'élève le triangle P_1AP_2 formé sur le graphique. - Si on tente d'évaluer le taux de variation obtenu entre les points P_3 et P_4 il est alors possible d'écrire: $\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$ En faisant mesurer les segments P_1A et AP_2 ainsi que P_3B et BP_4, il est possible de faire remarquer à l'élève que: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \ldots =$ une constante $= m$. - Il est intéressant d'observer que les triangles P_1AP_2 et P_3BP_4 sont semblables, mais il n'est pas possible de se servir de ces observations pour établir la proposition ci-haut car l'élève n'a pas encore abordé l'étude de la similitude. L'établissement de cette proportion ne peut donc s'établir pour le moment que de façon empirique: par mesurage et par calcul. L'usage de la calculatrice de poche serait souhaitable afin de pouvoir évaluer rapidement chacun des rapports. - Faire découvrir à l'élève que ce taux de variation correspond toujours au coefficient de la variable "x" dans une fonction affine de la forme $f(x) = mx + b$.

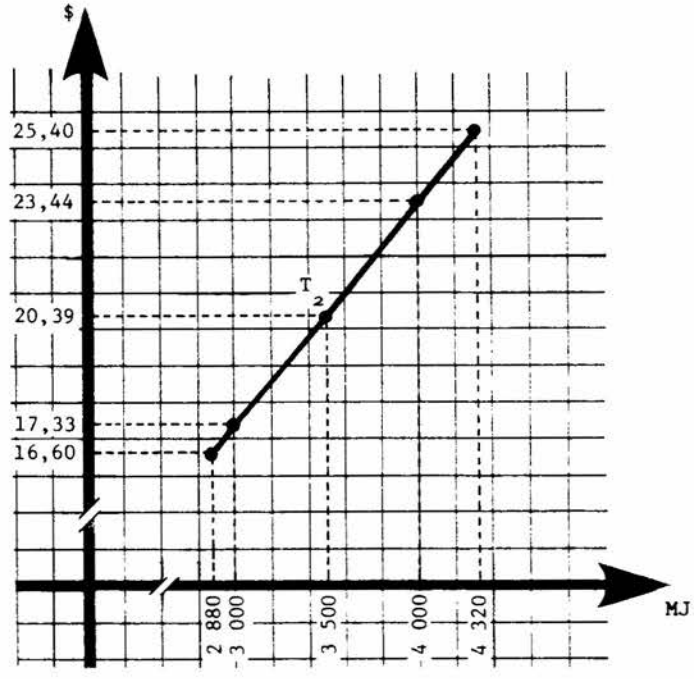
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.4 DETERMINER le taux de variation d'une fonction constante ou affine (suite).	IV	- Il serait également important de faire observer à l'élève le lien qui existe entre le taux de variation et l'orientation de la droite associée à la fonction. Trois situations peuvent se présenter: a) $m > 0$  Ce taux de variation est positif. La fonction est dite croissante. b) $m < 0$  Ce taux de variation est négatif. La fonction est dite décroissante.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.4 DETERMINER le taux de variation d'une fonction constante ou affine (suite).	IV	c) m = 0  Ce taux de variation est nul. La fonction est dite constante. - Faire remarquer à l'élève qu'une droite parallèle à l'axe des "y" ne représente pas une fonction. Profiter de cette occasion pour discuter de la division par zéro et de la représentation d'une droite si le dénominateur de son taux de variation tend vers zéro. - Il faudrait habituer l'élève à utiliser le taux de variation et le graphique associé afin de mieux comprendre la situation qui les engendre. Cette habileté est mise en évidence dans l'exemple des températures traité dans le commentaire sur l'objectif terminal.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.4 DETERMINER le taux de variation d'une fonction constante ou affine (suite).	IV	- L'expression "taux de variation" est fréquemment utilisée en sciences physiques. Il serait intéressant de présenter à l'élève des situations puisées dans le monde des affaires, des sciences, de la statistique, etc. Les notes didactiques complémentaires présentent quelques situations sur ce sujet. - L'exemple qui suit présente la description d'une tarification d'électricité. 

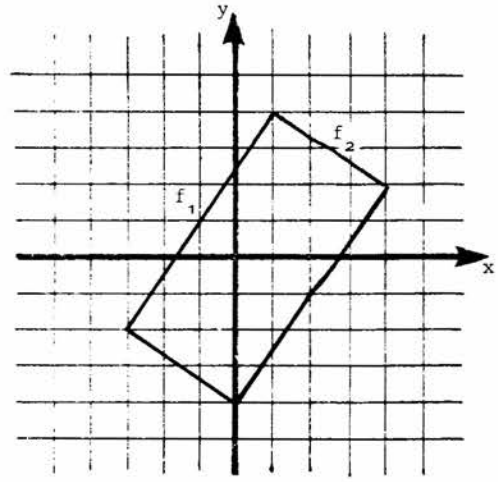
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.4 DETERMINER le taux de variation d'une fonction constante ou affine (suite).	IV	Pour trouver le taux de variation de chaque fonction il faut faire des calculs du genre: $T_1 : \frac{16,6 - 3}{2880 - 0} = 0,004\ 722\ 22$ $T_2 : \frac{25,4 - 16,6}{4320 - 2880} = 0,006\ 111\ 11$ $T_3 : \frac{40,4 - 25,4}{6120 - 4320} = 0,008\ 333\ 33$ Ce sera l'occasion de faire trouver plusieurs séquences pour calculer des expressions de ce genre, par exemple en utilisant . les parenthèses . les parenthèses et la commande $\boxed{\frac{1}{x}}$. la mémoire . la mémoire et la commande $\boxed{\frac{1}{x}}$. les propriétés des fractions $\frac{25,4 - 16,6}{4320 - 2880} = \frac{25,4}{4320 - 2880} - \frac{16,6}{4320 - 2880}$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.4 DETERMINER le taux de variation d'une fonction constante ou affine (suite).	IV	- A partir de coordonnées de points quelconques on pourra faire vérifier que, pour une même fonction, le taux de variation est constant.



$$\frac{17,33 - 16,60}{3000 - 2880} = \frac{20,39 - 17,33}{3500 - 3000} = \frac{23,44 - 20,39}{4000 - 3500} = \ldots = m$$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.4 DETERMINER le taux de variation d'une fonction constante ou affine (suite).	IV	La même expérience peut être effectuée à partir d'un graphique que l'élève aura lui-même construit. L'Hydro-Québec n'entend pas modifier son système de comptabilisation de l'énergie électrique domestique avant 1987. Dans ce contexte, on pourra utiliser le kilowatt-heure comme unité d'énergie si cela s'avère nécessaire dans un problème ou un exemple. Ce sera à l'élève de faire le relevé des coordonnées de quelques points et de vérifier que le taux de variation est constant (en tenant compte de l'approximation des relevés). Pour calculer le taux de variation de chaque fonction décrite par les côtés du rectangle ci-contre, il sera nécessaire de faire le relevé des coordonnées d'au moins deux points par côté. On fera vérifier que les taux de variation de deux côtés parallèles sont identiques, que le produit des taux de variation de deux côtés perpendiculaires est environ égal à -1 et que le produit des quatre taux de variation est environ 1.



OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.4 DETERMINER le taux de variation d'une fonction constante ou affine (suite).	IV	- On peut suggérer à l'élève de préparer un programme qui permet d'évaluer ce taux de variation. Voici à titre d'exemple un programme BASIC illustrant cette situation.

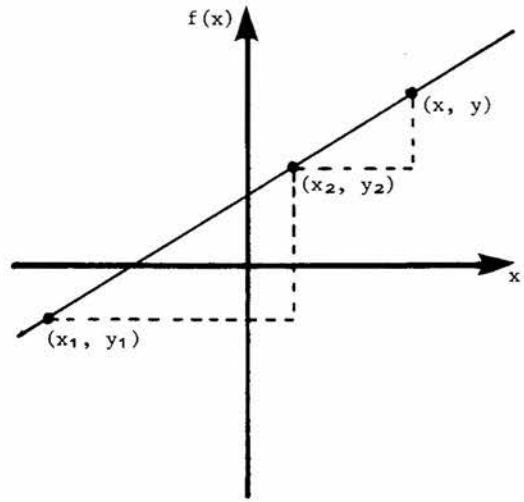
```
10 CLS
20 INPUT "Introduis les valeurs de m et de b associées à la fonction
   f(x)=mx+b"; M, B
30 C=-10
40 D=10
50 E=-10*M+B
60 F=10*M+B
70 V=(E-F)÷(C-D)
80 PRINT "Le taux de variation de f(x)="; M; "x+"; B; "est"; V
90 END
```

1.3.5 ECRIRE l'équation associée à une fonction représentée graphiquement par une droite. — IV

- A l'aide du graphique ci-contre, il est possible d'évaluer le taux de variation à partir des points (x_1, y_1) et (x_2, y_2)

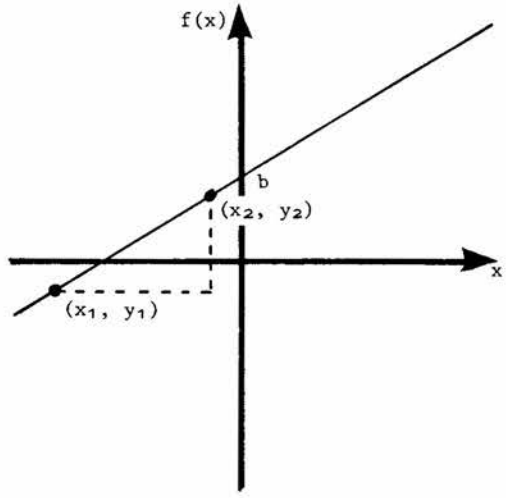
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

et de rechercher ce même taux de taux de variation à partir des coordonnées de l'un des deux points, ici (x_1, y_1) et d'un point quelconque

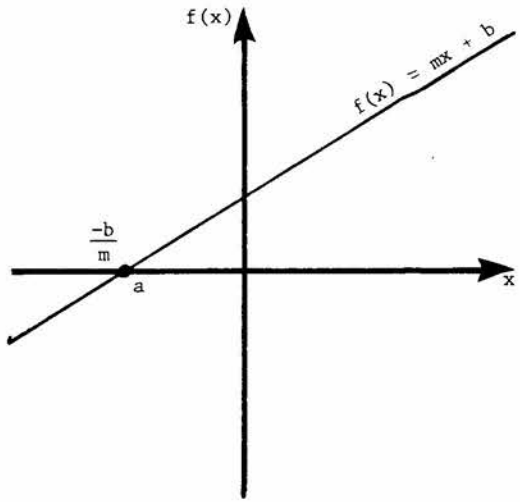


OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.5 ECRIRE l'équation associée à une fonction représentée graphiquement par une droite (suite).	IV	(x, y) situé sur la droite $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ ayant vu que, pour une fonction affine, le taux de variation est constant (objectif 1.3.4), ceci permet d'écrire $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ (1) Les couples (x_1, y_1) et (x_2, y_2) étant connus, il est facile de calculer la pente de la droite passant par ces points $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$ et la substitution dans (1) permet d'écrire $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = m$ (2) Si on connaît l'ordonnée à l'origine b, il est possible d'écrire $(x_1, y_1) = (0, b)$ et en substituant dans (2), on obtient $\frac{b - y}{-x} = m$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.5 ECRIRE l'équation associée à une fonction représentée graphiquement par une droite (suite).	IV	et par de simples transformations algébriques, on découvre l'équation $y = mx + b$ (3) - Cette démonstration permet des applications dans trois situations distinctes. 1- Recherche de l'équation associée à une fonction si on connaît les coordonnées de deux points. - On utilise alors l'équation (1) en y substituant les coordonnées des couples (x_1, y_1) et (x_2, y_2) obtenues par lecture directe à partir des points P_1 et P_2 choisis de façon pertinente. 2- Recherche de l'équation associée à une fonction si on connaît la pente et un point. - On utilise le (2) en y substituant la pente et les coordonnées du couple (x_1, y_1) obtenues par lecture directe à partir du point P_1 choisi de façon pertinente. - La pente est évaluée en faisant varier d'une valeur comme l'abscisse d'un point et en évaluant la variation provoquée à l'ordonnée; le quotient de ces variations $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ donne la pente m.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.5 ECRIRE l'équation associée à une fonction représentée graphiquement par une droite (suite).	IV	 3- Recherche de l'équation associée à une fonction si on connaît la pente et l'ordonnée à l'origine. - L'ordonnée à l'origine pouvant s'exprimer à l'aide d'un couple dont la forme est (0, b), il devient possible d'utiliser l'équation (2). - L'équation (3) est cependant d'une utilisation plus immédiate en y substituant directement la pente m et l'ordonnée à l'origine b. - La recherche de la pente s'effectue en utilisant la technique présentée précédemment tandis que l'ordonnée à l'origine se trouve par une lecture directe sur le graphique.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.5 ECRIRE l'équation associée à une fonction représentée graphiquement par une droite (suite).	IV	- La recherche de l'équation associée à une fonction à l'aide de lectures directes sur le graphique peut provoquer certaines imprécisions dans l'évaluation des coefficients de l'équation. Si certains points de la droite sont identifiés par les coordonnées des couples associés, on gagnera en précision en utilisant ces données pour l'établissement de l'équation. - A titre d'exemple, l'équation associée à la fonction T_2, telle que définie par le dernier graphique du commentaire portant sur l'objectif 1.3.4, pourrait être recherchée à l'aide de la méthode utilisant l'équation (1). Soient $(x_1, y_1) = (2880, 16,60)$ $(x_2, y_2) = (4320, 25,40)$ alors (1) donne: $\frac{25,40 - 16,60}{4320 - 2880} = \frac{16,60 - y}{2880 - x}$ $0,006\ 111\ 11 = \frac{16,60 - y}{2880 - x}$ $17,60 - 0,006\ 111\ 11x = 16,60 - y$ $y = 0,006\ 111\ 11x - 1$ d'où $T_2(x) = 0,006\ 111\ 11x - 1$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.5 ECRIRE l'équation associée à une fonction représentée graphiquement par une droite (suite).	IV	- Dans cet exemple, la pente est presque nulle (m = 0,006 111 11) et pourtant la droite représentant T_2 n'a pas la faible inclinaison que l'on pourrait imaginer. Cette situation est due au changement d'échelle qui affecte les axes des x et des y dans le graphique associé à cette fonction. Les commentaires portant sur l'objectif intermédiaire 3.2.3 montrent les effets du changement d'échelle sur une représentation graphique donnée.
1.3.6 CALCULER le zéro d'une fonction constante ou affine.	IV	- Rechercher le zéro d'une fonction, c'est trouver la valeur de la variable "x" lorsque f(x) égale zéro. Soit la fonction affine $f(x) = mx + b$ alors si: $f(x) = 0$ on obtient: $mx + b = 0$ $mx = -b$ $x = \frac{-b}{m}$ avec $m \neq 0$ - Le zéro d'une fonction affine est donc donné par $\frac{-b}{m}$ et se trouve à l'intersection de l'axe des "x" avec la droite associée à la fonction. 

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.6 CALCULER le zéro d'une fonction constante ou affine (suite).	IV	- Cette valeur (le zéro) se nomme également "abscisse à l'origine" ou solution de l'équation $mx + b = 0$ associée à la fonction. L'abscisse à l'origine est identifiée par "a". - Encore ici, la calculatrice peut servir. Soit la fonction $f(x) = 0,38x - 13$. On peut se demander pour quelle valeur numérique la procédure [×] 0,38 [=] [−] 13 [=] donnera-t-elle un affichage égal à 0. On trouve la procédure réciproque [+] 13 [=] [÷] 0,38 [=] et en partant de 0, on trouve 34,21 au centième près. Un tableau permet d'obtenir cette réponse par encadrement:

x	0,38x - 13
10	- 9,2
20	- 5,4
30	- 1,6
40	2,2

On recommence avec des valeurs comprises entre 30 et 40; puis entre 34 et 35; etc.

- Dans le cas de T_2 (fin des commentaires sur l'objectif 1.3.5), si $T_2 = 0$, on obtient

$$0,006\ 111\ 11x - 1 = 0$$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.6 CALCULER le zéro d'une fonction constante ou affine (suite).	IV	et à l'aide de la calculatrice en utilisant l'équation $x = \frac{-b}{m}$ on obtient le zéro de T_2 $x = \frac{1}{0,006\ 111\ 11}$ $x = 163,636\ 363$ - Dans ce cas, l'interprétation "une consommation énergétique de 163,636 363 MJ coûterait 0,00 $" n'a aucun sens puisqu'une consommation inférieure à 2880 MJ est régie par une autre tarification définie par la fonction T_1. Voilà donc une autre situation où le modèle mathématique retenu pour définir T_2 (ce modèle est: $T_2(x) = 0,006\ 111\ 11x - 1$) dépasse la réalité. Pour être fidèle à cette réalité, il faut réduire le domaine de T_2 à l'intervalle [2880, 4320]. - Un programme semblable à celui présenté à l'objectif 1.2.3 pourrait être mis au point par l'élève. Voici un programme BASIC à titre d'exemple.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.3.6 CALCULER le zéro d'une fonction constante ou affine (suite).	IV	10 CLS 20 INPUT "Introduis les valeurs associées à m et à b dans f(x)=mx+b."; M, B 30 IF B=0 THEN IF M=0 THEN PRINT "Il y a une infinité de zéros." ELSE PRINT "Il n'y a aucun zéro." 40 IF M=0 THEN STOP ELSE X=B/M 50 PRINT X; " est le zéro de cette fonction." 60 END

OBJECTIF TERMINAL 1.4 RESOUDRE des problèmes issus de situations se traduisant par un système d'équations du premier degré à deux variables réelles.

La pratique de l'enseignement des systèmes d'équations montre qu'il est relativement facile de mathématiser de nombreuses situations à l'aide de formes propositionnelles renfermant deux ou plusieurs variables. Cependant, le choix des situations pertinentes reste difficile et souvent celles-ci semblent peu réalistes. Un effort particulier devra être fait de façon à retenir des situations puisées dans le monde des affaires, de la consommation, des loisirs, etc. afin de faire ressortir l'utilité de ce sujet.

Qui dit "système d'équations" dit "intersection des ensembles-solutions reliés à ces équations". Les méthodes algébriques utilisées pour trouver l'intersection des ensembles-solutions associés à chaque forme propositionnelle sont très nombreuses. Le présent guide pédagogique n'en privilégie aucune mais en suggère un certain nombre et invite l'enseignant à les présenter à l'élève tout en laissant à ce dernier le choix de celle(s) qu'il retiendra; l'important, c'est que l'élève sache trouver l'ensemble-solution du système d'équations peu importe la méthode utilisée.

Il ne faudrait cependant pas oublier qu'en plus de servir à résoudre des problèmes se traduisant par un système d'équations, les connaissances mathématiques et les habiletés utilisées ici seront récupérables au niveau de la résolution de systèmes d'inéquations.

L'objectif terminal spécifie le nombre de variables réelles entrant dans la composition des systèmes d'équations. Cependant la résolution des équations du premier degré à deux

variables réelles débouche naturellement sur l'étude des systèmes à plus de deux variables réelles. Les règles de transformation restent valides, seul le temps d'exécution change. Cette ouverture sur le monde des équations ayant plus de deux variables présente des avantages au niveau du développement de l'habileté à mathématiser. Elle entrouvre des avenues à explorer. Elle incite à rechercher des méthodes rapides et efficaces. Elle encourage l'utilisation des matrices qui à l'instar des coefficients détachés ou de la méthode de Cramer généralisée permet le traitement mathématique de maintes situations.

L'apparition des matrices dans le traitement des systèmes d'équations ne devrait pas surprendre plus qu'il ne le faut. En fait la technologie nouvelle utilise grandement les matrices, la méthode dite des coefficients détachés et la règle de Cramer sont des variantes bien connues de calcul matriciel. Les matrices constituent un outil puissant de mathématisation du réel. Les commentaires sur certains objectifs intermédiaires et les notes didactiques complémentaires fournissent des informations intéressantes sur ce sujet.

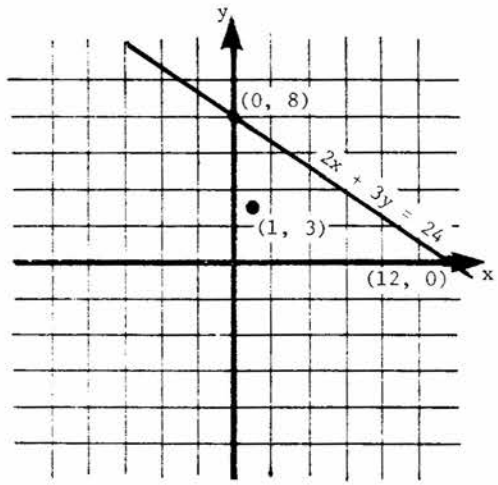
De plus, la calculatrice offre une puissance insoupçonnée très utile dans la recherche, par une méthode itérative, des solutions d'un système d'équations; cette méthode peut permettre à l'enseignant d'introduire l'élève au concept d'encadrement (par défaut ou par excès) et de lui présenter d'une façon très intuitive le concept de limite. Les représentations graphiques des phénomènes étudiés aideront grandement l'élève à explorer ces concepts.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.4.1 TRADUIRE une certaine situation par un système d'équations du premier degré à deux variables.	IV	- La construction d'un système est relativement simple; il suffit de se donner des hypothèses et de fabriquer les formes propositionnelles à partir du texte. Exemple: Un samedi, au cinéma, Paul dénombre 312 personnes et Pauline découvre qu'il y a deux fois plus d'enfants que d'adultes. Solution: Soient x le nombre d'enfants, y le nombre d'adultes. $x + y = 312$: "Paul dénombre 312 personnes", $x = 2y$: "Pauline découvre qu'il y a deux fois plus d'enfants que d'adultes". - La transcription d'une situation en un système composé de formes propositionnelles peut cependant s'avérer difficile et parfois même impossible. Exemple: Un samedi, au cinéma, Paul a noté que les enfants et les adultes constituaient un groupe de 312 personnes. Le dimanche, Pauline y a observé deux fois plus d'enfants que d'adultes. Pour x enfants et y adultes, l'élève est enclin à écrire:

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.4.1 TRADUIRE une certaine situation par un système d'équations du premier degré à deux variables (suite).	IV	$x + y = 312$ (1) $x = 2y$ (2) L'équation (1) décrit la situation le samedi et (2) celle du dimanche. Cependant, ces équations ne peuvent constituer un système car les observations ne portent pas sur le même groupe de personnes. (L'énoncé du problème ne le précise pas). - De tels exemples devraient être présentés à l'élève dans le but de provoquer chez-lui une recherche ou une discussion susceptibles de développer son esprit critique. - Les équations formant un système doivent décrire différents aspects d'une même situation. - ENRICHISSEMENT: Utiliser des situations qui font appel à plus de deux variables. Indiquer à l'élève qu'un système d'équations n'admet un nombre fini de solutions que s'il est composé d'autant d'équations distinctes (non équivalentes) qu'il y a de variables.
1.4.2 VERIFIER si un couple est solution d'une équation donnée.	IV	- Soit une expression: $2x + 3y = 24$. Si un couple est donné, il suffit de faire une substitution en vue d'établir la valeur de vérité de la proposition.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.4.2 VERIFIER si un couple est solution d'une équation donnée (suite)	IV	Soit le couple (1, 3), alors $2x + 3y = 24$ devient $2(1) + 3(3) \neq 24$, c'est-à-dire que ce couple ne satisfait pas la condition. S'il s'agit de déterminer des couples satisfaisant l'expression, il est possible de construire une grille et de la compléter de façon à obtenir des couples qui sont solutions de la forme propositionnelle donnée.

x	y	(x, y)
0	8	(0, 8)
12	0	(12, 0)



- Graphiquement on peut vérifier la même réalité en constatant que le point (1, 3) n'est pas sur la droite associée à l'équation $2x + 3y = 24$.

- Il est possible d'établir une procédure qui permette de vérifier si un couple est solution d'une équation donnée.

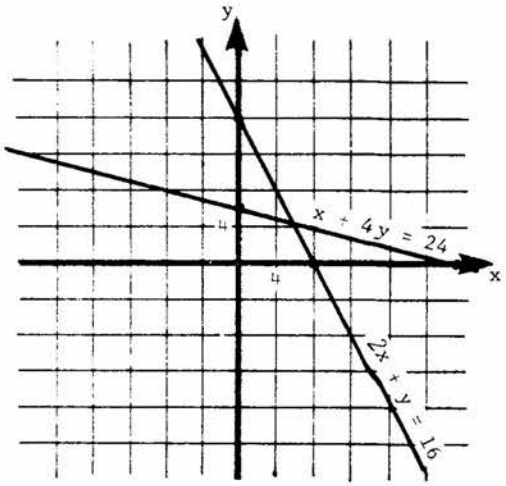
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.4.2 VERIFIER si un couple est solution d'une équation donnée (suite).	IV	Par exemple, la procédure x [×] 2 [=] [STO] y [×] 3 [=] [+] [RCL] [=] [+] 24 [+/-] [=] est associée à l'équation $2x + 3y = 24$ En substituant x et y par les coordonnées d'un couple, le résultat sera 0, ou approximativement 0, si le couple est solution de l'équation. Il faut remarquer que la mise en mémoire de 2x est nécessaire si la calculatrice ne possède pas la priorité des opérations. Dans le cas d'une calculatrice avec priorité des opérations, la procédure serait: 2 [×] x [+] 3 [×] y [-] 24 [=] - Un petit programme informatique peut servir à effectuer la vérification désirée. En BASIC, il pourrait s'écrire 10 CLS 20 INPUT "Introduis les valeurs associées aux coefficients de Ax+By=C"; A, B, C 30 INPUT "Introduis les composantes du couple (x, y)."; X, Y 40 IF A*X+B*Y=C THEN PRINT "Ce couple est solution de l'équation". ELSE PRINT "Ce couple n'est pas solution de l'équation". 50 END

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.4.3 REPRESENTER graphiquement un système d'équations du premier degré à deux variables.	IV	- L'élève doit construire la droite correspondant à chaque équation. Exemple: Soit le système $x + 4y = 24$ $2x + y = 16$ Il élabore une grille pour chaque équation a) $x + 4y = 24$ b) $2x + y = 16$ - Il est bon de faire constater l'alignement des points et l'aspect généralisant de la construction.

x	y
0	6
24	0
8	4
12	3

x	y
0	16
4	8
8	0
5	6

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.4.3 REPRESENTER graphiquement un système d'équations du premier degré à deux variables (suite).	IV	- Le graphique permet de visualiser soit des droites parallèles (confondues ou distinctes) soit des droites sécantes. Ce procédé toutefois ne donne souvent que des résultats approximatifs. Il est important de le signaler à l'élève.



- Il est possible d'établir les procédures qui permettent de construire le graphique associé au système. Celles associées au système ci-haut seraient:

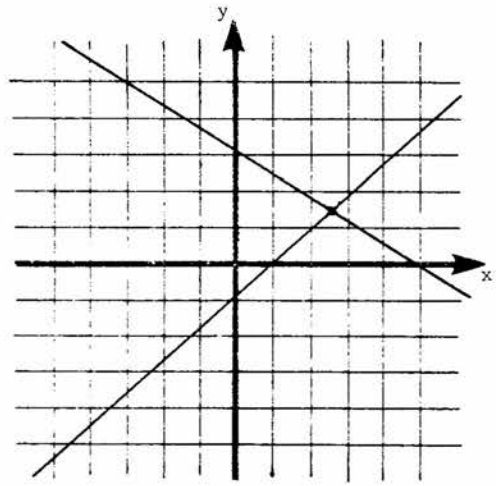
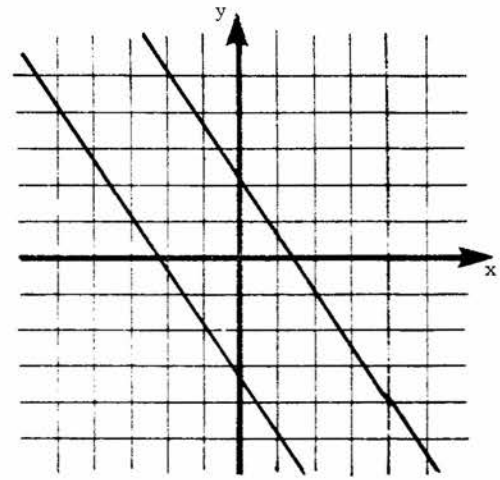
[+/-] [+] 24 [=] [÷] 4 [=] pour $y = \frac{-x + 24}{4}$

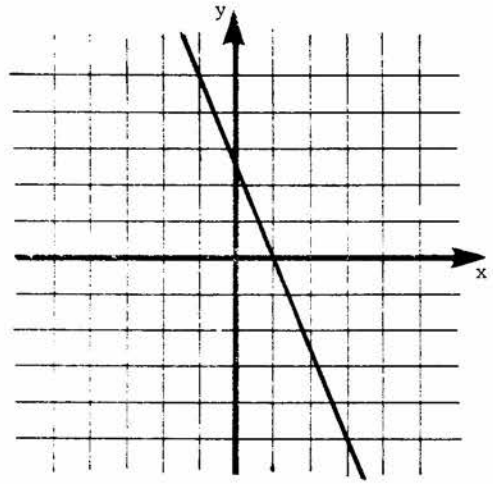
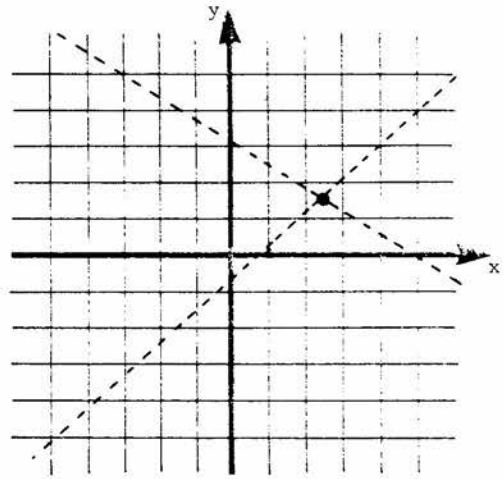
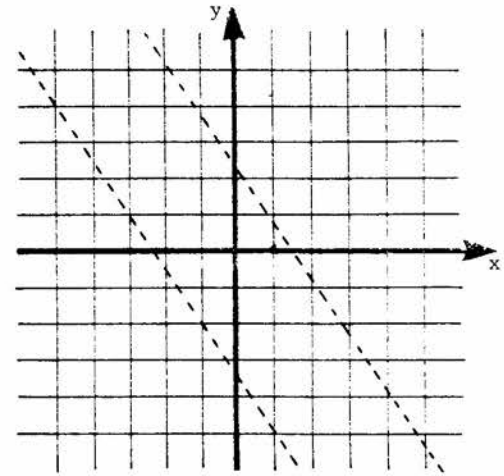
[×] 2 [+/-] [=] [+] 16 [=] pour $y = -2x + 16$

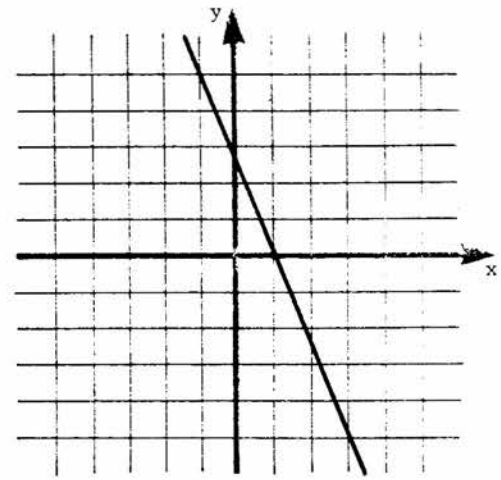
Les procédures engendrent des couples où en introduisant au début une valeur pour x, chaque procédure évalue la valeur correspondante pour y. Il ne reste qu'à porter les couples produits par chaque procédure sur le plan cartésien et à tracer les droites associées à chaque équation.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.4.3 REPRESENTER graphiquement un système d'équations du premier degré à deux variables (suite).	IV	- Il est important d'observer que l'union des droites tracées dans un même plan représente le système d'équations. De façon générale, un système d'équations se définit comme une famille finie d'équations. - Le programme BASIC suivant permet de représenter un système d'équations dans le plan cartésien.

```
 10 CLS
 20 INPUT "Ecris les valeurs de A, B et C dans l'équation Ax+By=C";
    A, B, C
 30 INPUT "Ecris les valeurs de D, E et F dans l'équation Dx+Ey=F";
    D, E, F
 40 FOR Y=25 TO -25 STEP -1
 50 FOR X=-25 TO 25
 60 IF A*X+B*Y=C OR D*X+E*Y=F THEN LPRINT CHR$ (167); ELSE GOTO 80
 70 GOTO 110
 80 IF X=0 OR Y=0 THEN LPRINT CHR$ (250); ELSE GOTO 100
 90 GOTO 110
100 LPRINT "  ";
110 NEXT X
120 LPRINT "  ";
130 NEXT Y
140 END
```

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.4.4 REPRESENTER graphiquement l'ensemble-solution d'un système d'équations du premier degré à deux variables.	IV	- De façon générale, on définit l'ensemble-solution d'un système d'équations comme étant l'intersection des ensembles-solutions des équations du système. - A l'objectif précédent, lors d'exercices, l'élève a pu rencontrer des situations analogues à celles ci-après.  

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.4.4 REPRESENTER graphiquement l'ensemble-solution d'un système d'équations du premier degré à deux variables (suite).	IV	 dont les ensembles-solutions se présentent respectivement comme suit: (les pointillés signifient que les éléments de ces droites n'appartiennent pas à l'ensemble-solution sauf le point de sécante dans le premier exemple).  

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.4.4 REPRESENTER graphiquement l'ensemble-solution d'un système d'équations du premier degré à deux variables. (suite)	IV	 - L'ensemble-solution d'un système d'équations étant soit un singleton, soit un ensemble-vide ou soit l'ensemble des couples associés aux droites confondues, il en résulte que la première série de graphiques ne peut le représenter adéquatement. - Il est cependant possible de représenter l'ensemble-solution d'un système d'équations à l'aide de la première série de graphiques en utilisant de la couleur. Il est toutefois préférable de représenter l'ensemble-solution d'un système d'équations en utilisant la technique préconisée dans la seconde série de graphiques.

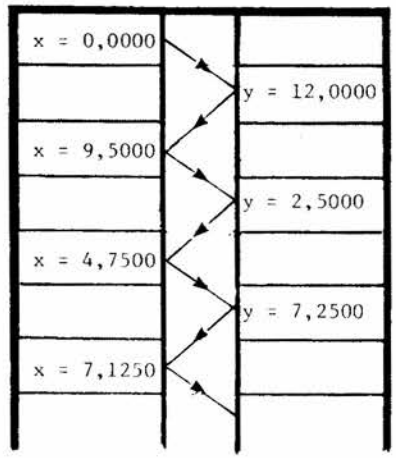
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.4.4 REPRESENTER graphiquement l'ensemble-solution d'un système d'équations du premier degré à deux variables (suite).	IV	- Plus loin (objectif 1.4.6) on verra comment il est possible de s'aider d'une représentation graphique pour bien comprendre comment agit la méthode itérative dans la recherche de l'ensemble-solution. Les notes didactiques complémentaires expliquent davantage cette méthode.
1.4.5 Etant donné un système d'équations du premier degré à deux variables, IDENTIFIER un système équivalent.	IV	- Deux systèmes d'équations sont équivalents si et seulement si ils possèdent un même ensemble-solution. - Les transformations élémentaires appelées également combinaisons linéaires qui permettent de construire des systèmes d'équations équivalents sont: - multiplier (diviser) une équation par un scalaire; $x + 4y = 24$ (1) $2x + y = 16$ (2) est équivalent à $2x + 8y = 48$ (3)* $2x + y = 16$ (4) - additionner (soustraire) deux équations; en soustrayant (4) de (3), on obtient un nouveau système équivalent au premier

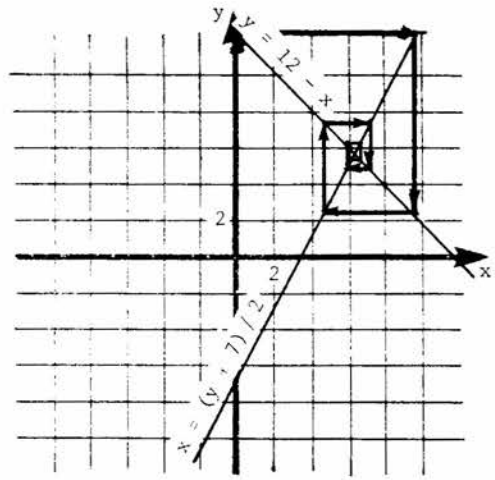
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.4.5 Etant donné un système d'équations du premier degré à deux variables, IDENTIFIER un système équivalent (suite).	IV	$7y = 32$ (5)* $2x + y = 16$ (6) - Une simple observation des transformations élémentaires utilisées permet de constater l'inutilité de l'écriture des variables x et y; il est donc avantageux de ne retenir que les coefficients et d'utiliser une représentation matricielle (méthode des coefficients détachés). Voici les matrices associées aux trois systèmes précédents. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 24 \\ 2 & 1 & 16 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 8 & 48 \\ 2 & 1 & 16 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 32 \\ 2 & 1 & 16 \end{bmatrix}$ - L'application des transformations élémentaires dans le but de rechercher le système d'équations équivalent le plus simple permet d'obtenir les systèmes d'équations intermédiaires suivants: en multipliant (6) par 7 $7y = 32$ (7) $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 32 \\ 14 & 7 & 112 \end{bmatrix}$ $14x + 7y = 112$ (8)* en soustrayant (7) de (8) $7y = 32$ (9) $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 32 \\ 14 & 0 & 80 \end{bmatrix}$ $14x = 80$ (10)*

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.4.5 Etant donné un système d'équations du premier degré à deux variables, IDENTIFIER un système équivalent (suite).	IV	en divisant (9) par (7) et (10) par 14 $y = \frac{32}{7}$ (11)* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{32}{7} \end{bmatrix}$ $x = \frac{40}{7}$ (12)* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{40}{7} \end{bmatrix}$ - L'astérisque indique l'équation modifiée par rapport au système précédent. - Pour résoudre un système d'équations, on recherche généralement des systèmes équivalents. Par exemple, le système $2x - y = 2$ $4x - 5y = 5$ est équivalent à $2x - y = 2$ $2x - 4y = 3$ - En faisant construire le graphique cartésien de ces deux systèmes, il est possible de faire découvrir à l'élève que les graphiques associés à ces systèmes équivalents ont le même point d'intersection pour les droites respectives.

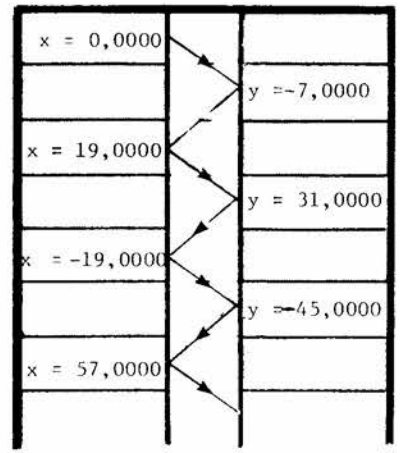
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.4.5 Etant donné un système d'équations du premier degré à deux variables, IDENTIFIER un système équivalent (suite).	IV	- On peut constater que, dans le premier exemple, le système équivalent le plus simple $y = \frac{32}{7}$ $x = \frac{40}{7}$ permet de dégager la solution du système $(x, y) = \left(\frac{40}{7}, \frac{32}{7}\right)$
1.4.6 RESOUDRE un système d'équations du premier degré à deux variables.	IV	- Pour résoudre un système d'équations, il suffit de rechercher des systèmes équivalents jusqu'à ce que l'on obtienne le système équivalent le plus simple. La méthode des coefficients détachés permet cette recherche d'une façon efficace (objectif 1.4.5). - On peut également utiliser des méthodes plus traditionnelles telles la réduction, la comparaison, la substitution et la règle de Cramer. Les notes didactiques complémentaires présentent un exemple de chacune de ces méthodes de résolution. - Vu sa nouveauté, il peut être intéressant de résoudre un système à l'aide de la calculatrice en utilisant une méthode itérative qui permettra "d'encadrer" la solution du système en fournissant une bonne approximation de celle-ci.

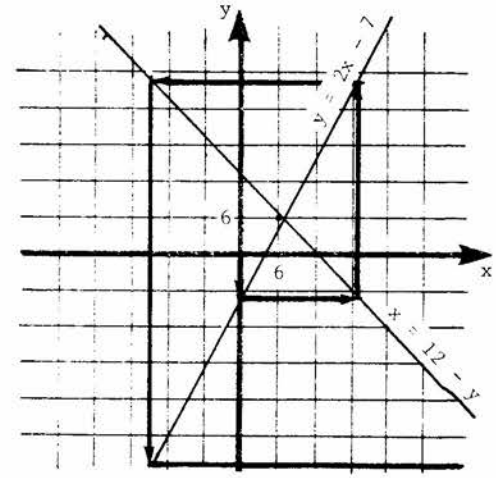
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.4.6 RESOUDRE un système d'équations du premier degré à deux variables (suite).	IV	Soit le système $x + y = 12$, $2x - y = 7$ équivalent à $y = -x + 12$ (1), $x = \frac{y + 7}{2}$ (2) ou à $x = -y + 12$ (3), $y = 2x - 7$ (4). En posant 0 comme valeur initiale de x (x = 0), on évalue alternativement (1) et (2) un certain nombre de fois. En se limitant aux 4 premières décimales, on obtient





OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.4.6 RESOUDRE un système d'équations du premier degré à deux variables (suite).	IV	Dans le tableau, on remarque que x tend vers $6,\overline{3}$ y tend vers $5,\overline{6}$ A la dixième étape, x = 6,3457 et y = 5,6543 si on accepte une réponse au dixième (0, 1) près. Il faut noter qu'en posant x = 0 dans (4) et en évaluant alternativement (4) et (3) un certain nombre de fois, on obtient le tableau





On s'éloigne du point d'intersection. En fait, à la dixième étape, x = 3249 et y = 6491. Cette situation ne mène nulle part et l'élève doit apprendre à la reconnaître afin de pouvoir la rejeter.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.4.6 RESOUDRE un système d'équations du premier degré à deux variables (suite).	IV	- Les procédures utilisées ici sont [+/-] [+] 12 [STO] pour $y = -x + 12$ (1) [(] [RCL] [+] 7 [)] [÷] 2 [STO] pour $y = \frac{y + 7}{2}$ (2) [+/-] [+] 12 [STO] pour $x = -y + 12$ (3) 2 [×] [RCL] [-] 7 [STO] pour $y = 2x - 7$ (4) - L'enseignant est invité à explorer avec les élèves les cas où les droites sont parallèles ou perpendiculaires entre elles ainsi que ceux où l'une ou les deux droites du système sont parallèles aux axes. Les notes didactiques complémentaires présentent une brève étude de ce sujet. - Il est possible également de trouver la solution du système par substitution de valeurs en utilisant la calculatrice. Ainsi pour le système $2x - y = 2$ $4x - 5y = -5$ il est possible d'établir des procédures qui permettent de vérifier si un couple est solution du système.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.4.6 RESOUDRE un système d'équations du premier degré à deux variables (suite).	IV	Pour 2x - y = 2 on a: x [×] 2 [=] [STO] y [+/-] [+] [RCL] [=] [-] 2 [=] et pour 4x - 5y = -5 on a x [×] 4 [=] [STO] y [×] 5 [+/-] [=] [+] [RCL] [=] [+] 5 [=] En substituant x et y par les coordonnées d'un couple, il est possible de déterminer si celui-ci est solution du système lorsque le résultat des deux procédures est 0 ou approximativement 0. Ici la mise en mémoire des valeurs 2x et 4x est justifiée par l'emploi d'une calculatrice sans priorité des opérations. Pour une calculatrice admettant la priorité des opérations, les deux procédures à utiliser pourraient être 2 [×] x [-] y [-] 2 [=] 4 [×] x [-] 5 [×] y [+] 5 [=] - Une autre façon de résoudre très efficacement un système d'équations du premier degré à deux variables, c'est d'utiliser la calculatrice ou l'ordinateur pour évaluer les formules

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.4.6 RESOUDRE un système d'équations du premier degré à deux variables (suite).	IV	$x = \dfrac{C_1B_2 - B_1C_2}{A_1B_2 - B_1A_2}$ $y = \dfrac{A_1C_2 - C_1A_2}{A_1B_2 - B_1A_2}$ avec $A_1B_2 \neq B_1A_2$. Ces deux formules proviennent du système d'équations $A_1x + B_1y = C_1$ $A_2x + B_2y = C_2$ duquel on a isolé les variables x et y à l'aide de transformations algébriques élémentaires. La méthode de Cramer présentée dans les notes didactiques complémentaires découle de ces formules. - Les deux séquences suivantes permettent de rechercher respectivement la valeur de x et de y à l'aide d'une calculatrice qui respecte la priorité des opérations. [(] C_1 [×] B_2 [−] B_1 [×] C_2 [)] [÷] [(] A_1 [×] B_2 [−] B_1 [×] A_2 [)] [=] [(] A_1 [×] C_2 [−] C_1 [×] A_2 [)] [÷] [(] A_1 [×] B_2 [−] B_1 [×] A_2 [)] [=] - Le programme BASIC suivant permet de trouver la solution d'un système d'équations en permettant de discuter celle-ci.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.4.6 RESOUDRE un système d'équations du premier degré à deux variables (suite).	IV	

```
 10 CLS
 20 INPUT "Ecris les valeurs de A, B et C dans l'équation Ax+By=C";
    A, B, C
 30 INPUT "Ecris les valeurs de D, E et F dans l'équation Dx+Ey=F";
    D, E, F
 40 IF A*E=B*D AND B*F=C*E THEN PRINT "Les droites sont parallèles
    confondues et le système admet une infinité de solutions."
 50 IF A*E=B*D AND B*F< >C*E THEN PRINT "Les droites sont parallèles
    disjointes et le système n'admet aucune solution".
    ELSE GOTO 70
 60 STOP
 70 X=(C*E-B*F)/(A*E-B*D)
 80 Y=(A*F-C*D)/(A*E-B*D)
 90 PRINT "Les droites sont sécantes et la solution du système est
    ("; X; "; "; Y; ")."
100 END
```

OBJECTIF TERMINAL 1.5 RESOUDRE des problèmes issus de situations se traduisant par un système d'inéquations du premier degré à deux variables réelles.

Jusqu'à maintenant, l'étude des inéquations du premier degré à une ou deux variables ainsi que leur représentation dans le plan s'est toujours effectuée en dehors de toute application concrète et la seule justification au traitement d'un tel sujet au niveau secondaire semble avoir été la connaissance et l'application correcte des axiomes d'ordre. Cependant, la représentation graphique d'un système d'inéquations peut déboucher sur des applications très pratiques et la création d'un système d'inéquations peut permettre de mathématiser certaines situations d'une façon relativement facile. D'ailleurs, un très grand nombre de situations peuvent se mathématiser à l'aide d'inéquations et le nombre d'applications des inéquations dans la société technique moderne est tout aussi considérable que celui ayant trait aux équations.

Les situations qui peuvent se mathématiser à l'aide d'un système d'inéquations cherchent très souvent à optimiser les solutions trouvées et en ce sens, cet objectif se veut une introduction très sommaire mais réaliste à la programmation linéaire. "Programmation" car les séquences d'opérations permettant de trouver la solution optimale se déroulent dans un ordre bien précis (un programme). "Linéaire" car les phénomènes mathématisés sont représentés à l'aide d'équations et d'inéquations du premier degré.

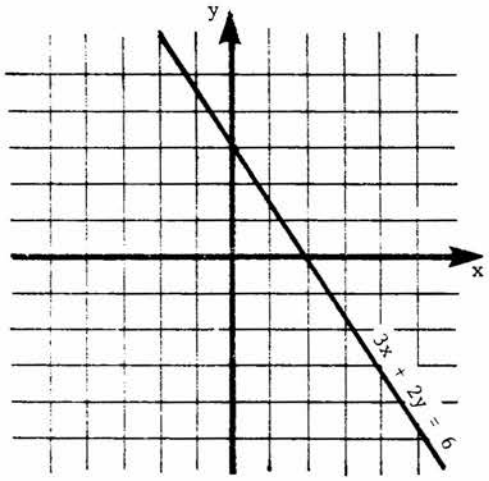
Il n'est nullement dans l'intention du programme de mathématique au second cycle du secondaire d'utiliser des méthodes de résolution très complexes et d'aboutir à l'étude de la

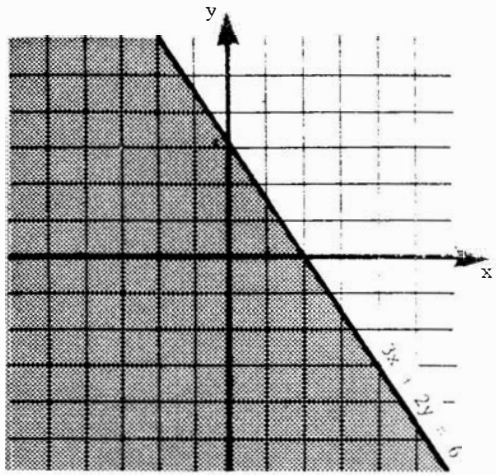
méthode du simplexe. Dans ses grandes lignes, la démarche suggérée pourrait s'énoncer ainsi:

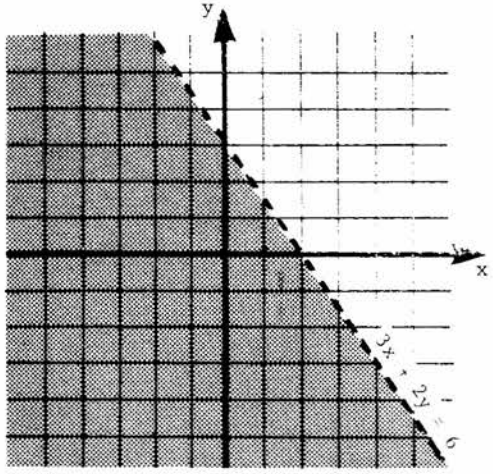
1. mathématisation de la situation à l'aide d'un système d'inéquations (modélisation);
2. représentation du système d'inéquations dans le plan cartésien (construction du polygone de contraintes);
3. reconnaissance de la fonction à optimiser (droite baladeuse);
4. recherche de la solution optimale par substitution de valeurs dans la fonction à optimiser ou par translation de la droite baladeuse sur le polygone de contraintes;
5. interprétation du ou des résultat(s).

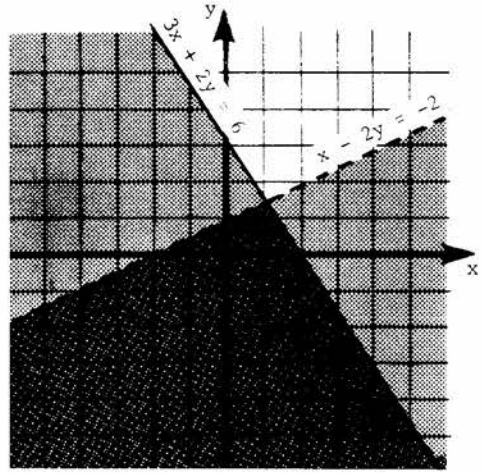
La recherche de solutions à des problèmes d'optimisation apparaît donc comme le point culminant de l'étude des équations et des inéquations du premier degré aini que de leur représentation graphique. La programmation linéaire apparaît alors comme un sujet riche en applications de toutes sortes. Il convient cependant de sélectionner les situations présentées à l'élève de façon à montrer, au besoin à partir de modèles réduits, l'utilité et l'efficacité de la mathématique comme outil favorisant une prise de décision. Il est évident que ces situations, bien que présentant de fortes ressemblances avec celles de l'industrie, devront être simples et choisies de façon à susciter l'intérêt de l'élève.

Le choix de situations (agriculture, contrôle d'inventaire, production, alimentation, stockage, affectation de personnel, transport, etc.), l'utilisation d'heuristiques et l'emploi systématique de la calculatrice ou de l'ordinateur sont autant d'éléments qui contribueront d'une façon efficace au succès de l'étude de ce sujet.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.1 VERIFIER si un couple est solution d'un système d'inéquations du premier degré à deux variables.	IV	- Avant l'atteinte de cet objectif, l'élève doit être amené à vérifier d'abord si un couple est solution d'une inéquation. Ce travail va lui indiquer dans quel demi-plan il doit puiser des valeurs appropriées. Voici un exemple illustrant ce procédé. Soit l'inéquation $3x + 2y \leq 6.$ La droite d'équation $3x + 2y = 6$ est représentée par 

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.1 VERIFIER si un couple est solution d'un système d'inéquations du premier degré à deux variables (suite).	IV	et l'inéquation $3x + 2y \leq 6$ est représentée par  alors (0, 0) est solution car par substitution de ses composantes dans l'inéquation, on obtient une proposition vraie $3(0) + 2(0) \leq 6$ $0 \leq 6$ Il est alors possible d'établir la règle suivante: Si les composantes d'un couple substituées dans une inéquation transforment celle-ci en une proposition vraie, alors ce couple est solution de cette inéquation.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.1 VERIFIER si un couple est solution d'un système d'inéquations du premier degré à deux variables (suite).	IV	- L'ensemble des points se situant sur la droite d'équation associée à l'inéquation constitue la frontière du demi-plan. Une droite tracée à l'aide d'un trait plein indique que la frontière appartient à la relation tandis que lorsqu'elle est tracée à l'aide d'un trait discontinu (ligne pointillée), la frontière n'appartient pas à la relation. Voici la représentation graphique de $3x + 2y < 6$.  - La détermination par un procédé algébrique de l'ensemble-solution d'un système d'inéquations est fastidieuse. On se contentera ici d'une représentation graphique du système d'inéquations afin de pouvoir visualiser l'ensemble-solution.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.1 VERIFIER si un couple est solution d'un système d'inéquations du premier degré à deux variables (suite).	IV	- Graphiquement, un couple est solution d'un système d'inéquations s'il se retrouve à l'intersection des demi-plans associés aux inéquations du système. Soit le système $3x + 2y \leq 6$ $x - 2y > -2$  Graphiquement, il est facile de constater que (-1, -4) est solution du système; cependant, dans certaines circonstances il est difficile de porter un jugement sûr comme dans le cas du couple (2,27, -0,39) car le graphique constitue toujours une représentation imprécise de la réalité mathématique qu'il représente.

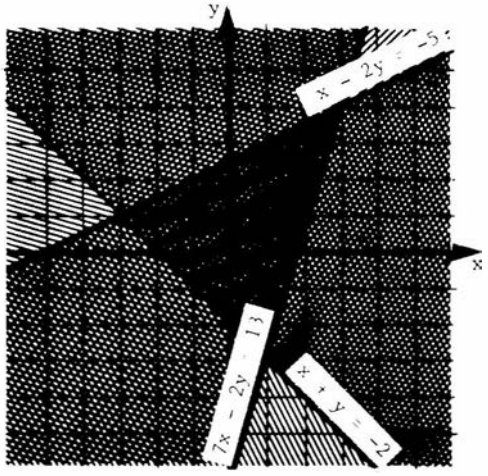
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.1 VERIFIER si un couple est solution d'un système d'inéquations du premier degré à deux variables (suite).	IV	Le procédé de substitution devient alors l'outil indispensable. Un couple vérifie un système d'inéquations si et seulement si la substitution de ses composantes transforme toutes les formes propositionnelles du système en propositions vraies. Le couple (-1, -4) est solution du système tandis que (2,27, -0,39) ne l'est pas.

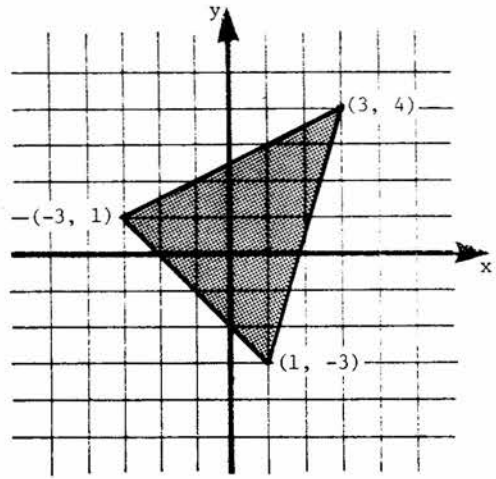
Couples	Substitutions	Valeurs de vérité	
(-1, -4)	$3(-1) + 2(-4) \leq 6$ $-11 \leq 6$	Vrai	Vrai
	$(-1) - 2(-4) > -2$ $7 > -2$	Vrai	
(2,27 -0,39)	$3(2,27) + 2(-0,39) \leq 6$ $6,03 \leq 6$	Faux	Faux
	$(2,27) - 2(-0,39) > -2$ $3,05 > -2$	Vrai	

1.5.2 REPRESENTER graphiquement un système d'inéquations du premier degré à deux variables.	IV	- Pour tracer le graphique cartésien du système d'inéquations $x - 2y \geq -5$ $7x - 2y \leq 13$ $x + y \geq -2$ on exécute pour chaque inéquation du système les tâches suivantes:

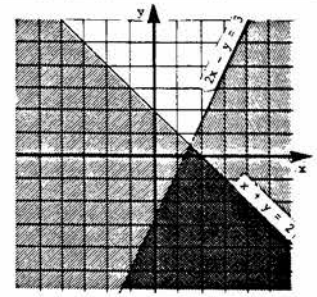
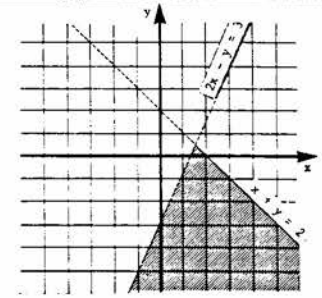
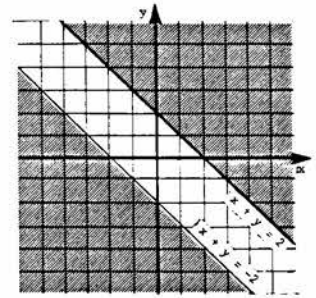
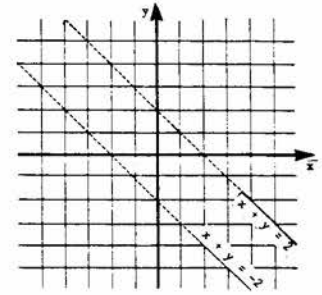
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.2 REPRESENTER graphiquement un système d'inéquations du premier degré à deux variables (suite).	IV	- tracer, en trait plein ou pointillé, la droite correspondant à l'équation considérée; - identifier quel demi-plan est associé à cette même inéquation, en appliquant la règle de substitution énoncée dans les commentaires portant sur l'objectif 1.5.1; il faut cependant savoir que cette règle n'est valide que pour les points n'appartenant pas à la frontière du demi-plan (la droite); de plus, lorsque la droite ne passe pas par l'origine, il est très utile d'employer le couple (0, 0) pour effectuer la substitution;

Couples	Substitutions	Valeurs de vérité	
(0, 0)	$(0) - 2(0) \geq -5$ $0 \geq -5$	Vrai	Vrai
	$7(0) - 2(0) \leq 13$ $0 \leq 13$	Vrai	
	$(0) + (0) \geq -2$ $0 \geq -2$	Vrai	

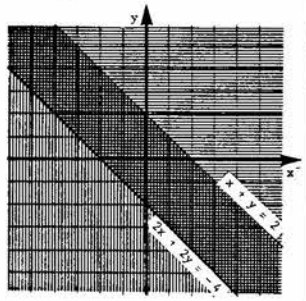
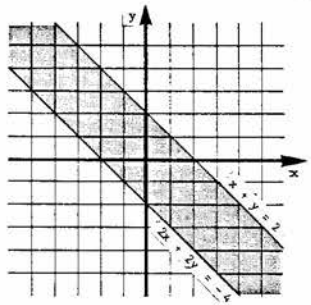
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.2 REPRESENTER graphiquement un système d'inéquations du premier degré à deux variables (suite).	IV	La représentation graphique associée à cette situation sera: 

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.3 REPRESENTER graphiquement l'ensemble-solution d'un système d'inéquations du premier degré à deux variables.	IV	- L'ensemble-solution d'un système d'inéquations correspond toujours à l'intersection des ensembles-solutions définis par chaque composante du système. En d'autres mots, l'ensemble-solution d'un système d'inéquations correspond à l'ensemble des couples qui transforment simultanément toutes les inéquations du système en propositions vraies. - La représentation graphique de l'ensemble-solution associé au système $x - 2y \geq -5$ $7x - 2y \leq 13$ $x + y \geq -2$ est fournie par le graphique suivant: 

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.3 REPRESENTER graphiquement l'ensemble-solution d'un système d'inéquations du premier degré à deux variables (suite).	IV	

Systèmes d'inéquations	Représentations des systèmes	Représentations des ensembles-solutions
$x + y \leq 2$ $2x - y > 3$		
$x + y \geq 2$ $x + y \leq -2$		

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.3 REPRESENTER graphiquement l'ensemble-solution d'un système d'inéquations du premier degré à deux variables (suite).	IV	

Systèmes d'inéquations	Représentations des systèmes	Représentations des ensembles-solutions
$x + y \leq 2$ $2x + 2y \geq -4$		

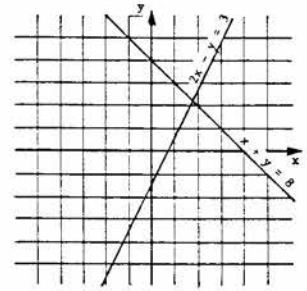
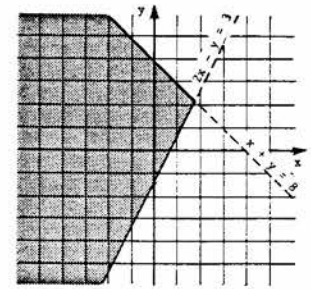
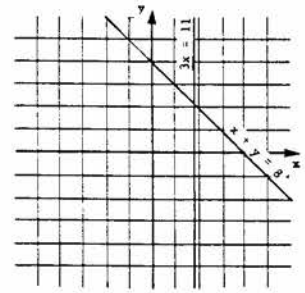
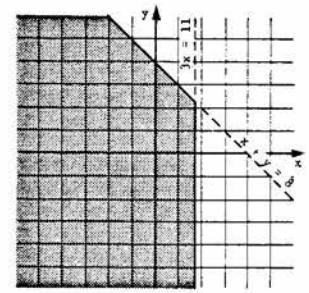
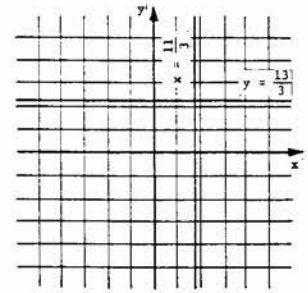
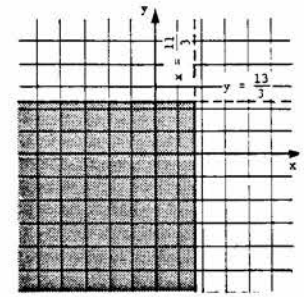
- L'ensemble-solution d'un système d'inéquations est consituté de couples de la forme (x, y):
  - dans le premier cas: $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-\infty, 0]$;
  - dans le deuxième cas: $x \in \{\ \}$ et $y \in \{\ \}$;
  - dans le troisième cas: $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.3 REPRESENTER graphiquement l'ensemble-solution d'un système d'inéquations du premier degré à deux variables (suite).	IV	- Il existe une distinction très nette entre la représentation d'un système et celle de son ensemble-solution. Il est important que l'élève saisisse bien cette différence car elle est à la base d'une bonne compréhension du rôle que jouent les contraintes dans la construction d'un polygone appelé de contraintes (objectif 1.5.7).
1.5.4 RECHERCHER des inéquations équivalentes à une inéquation du premier degré à deux variables données.	IV	- Cette recherche s'effectue à l'aide de transformations élémentaires basées sur les propriétés des opérations et les propriétés de la relation d'ordre: - addition ou soustraction à chaque membre d'une même quantité; - multiplication ou division de chaque membre par une même quantité non nulle.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.4 RECHERCHER des inéquations équivalentes à une inéquation du premier degré à deux variables données (suite).	IV	- Soit l'inéquation $2x + 3y \leq 9$. L'application de ces propriétés permet d'obtenir les inéquations équivalentes suivantes: $2x + 3y - 9 \leq 0$ $4x + 6y - 18 \leq 0$ $-2x - 6y + 9 \geq 0$ etc. - Faire observer à l'élève que les inéquations équivalentes ont même ensemble-solution et même représentation graphique. - ENRICHISSEMENT: Cette recherche peut se poursuivre par l'étude de l'équivalence entre systèmes d'inéquations. Le système $x + y \leq 8$, $2x - y \leq 3$ est-il équivalent à $3x \leq 11$, $x - 2y \leq -5$?

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.5 RESOUDRE le système d'équations associé au système d'inéquations du premier degré à deux variables.	IV	- Soit le système d'inéquations $x + y \leq 8$ $2x - y \leq 3$ le système d'équations qui lui est associé est $x + y = 8$ $2x - y = 3$ - Résoudre algébriquement le système d'équations signifie: "rechercher le système équivalent le plus simple". - L'enseignant sera à même de vérifier à l'aide des représentations suivantes que la recherche du système d'équations équivalent le plus simple provoque une rotation des droites associées au système initial de façon à les placer parallèles aux axes. Le centre de rotation correspond au centre du faisceau qui comprend ces droites.

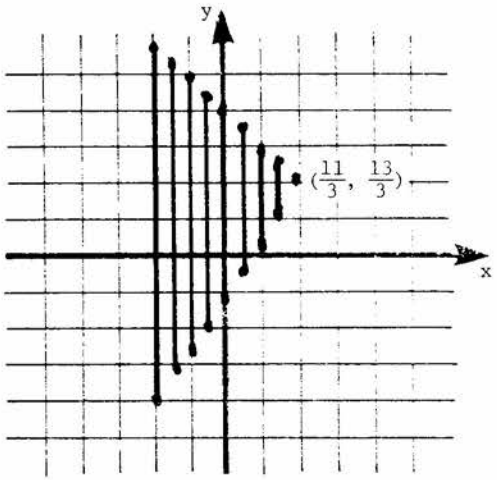
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.5 RESOUDRE le système d'équations associé au système d'inéquations du premier degré à deux variables (suite).	IV	

Systèmes d'inéquations	Représentations des systèmes	Représentations des ensembles-solutions
$x + y \leq 8$ $2x - y \leq 3$		
$x + y \leq 8$ $3x \leq 11$		
$x \leq \frac{11}{3}$ $y \leq \frac{13}{3}$		

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.5 RESOUDRE le système d'équations associé au système d'inéquations du premier degré à deux variables (suite).	IV	- Si on considère les systèmes d'inéquations associés à ces systèmes d'équations, les représentations graphiques permettent de constater que l'équivalence ne tient plus. En effet la région correspondant à la solution de chaque système diffère bien que le point d'intersection demeure le même. On est donc obligé d'admettre que la technique algébrique utilisée pour résoudre des systèmes d'équations n'est pas valide pour trouver la solution des systèmes d'inéquations. Ainsi, le couple (3, 0,5) satisfait les systèmes d'inéquations (3) et (2) bien qu'il ne satisfasse pas le système (1); il en est de même pour le couple (0, -4) ainsi que pour bien d'autres. - Il est cependant intéressant de constater que pour chaque valeur vérifiant l'inéquation $x \leq \frac{11}{3}$, y appartient à l'intervalle $[2x - 3, 8 - x]$. Le tableau de la page suivante et le graphique qui l'accompagne mettent cette caractéristique en évidence.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.5 RESOUDRE le système d'équations associé au système d'inéquations du premier degré à deux variables (suite).	IV	

x	$2x-3 \leq y \leq 8-x$
$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$
3	$3 \leq y \leq 5$
2	$1 \leq y \leq 6$
1	$-1 \leq y \leq 7$
0	$-3 \leq y \leq 8$
-1	$-5 \leq y \leq 9$
-2	$-7 \leq y \leq 10$



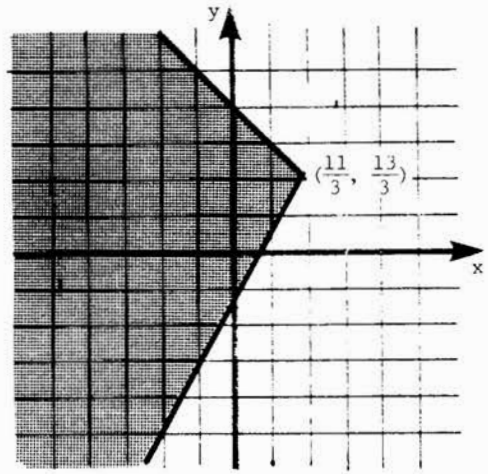
$x \leq \frac{11}{3}$ est obtenue en additionnant membre à membre les deux inéquations du système initial et en isolant ensuite la variable x.

L'intervalle $[2x - 3, 8 - x]$ est obtenu par la transformation de:

$$x + y \leq 8 \quad (1)$$
$$2x - y \leq 3 \quad (2)$$

en effet, (1) devient $y \leq 8 - x$ (3)
tandis que (2) permet d'écrire $-y \leq 3 - 2x$ d'où $y \geq 2x - 3$ (4).
(3) et (4) peuvent s'écrire:

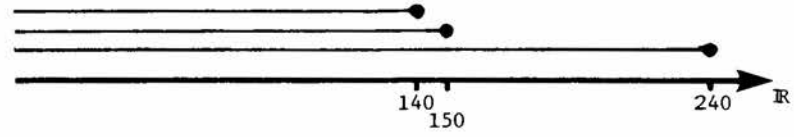
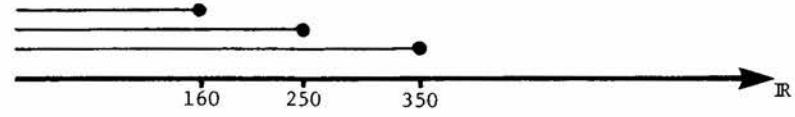
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.5 RESOUDRE le système d'équations associé au système d'inéquations du premier degré à deux variables (suite).	IV	$2x - 3 \leq y$ $y \leq 8 - x$ ce qui donne $2x - 3 \leq y \leq 8 - x$ et l'intervalle $[2x - 3, 8 - x]$. - Le système d'inéquation (1) admet comme solution les couples (x, y) qui respectent les contraintes suivantes: $x \leq \frac{11}{3}$ $2x - 3 \leq y \leq 8 - x$ Dans ce cas, on obtient le graphique cartésien de la page suivante. Ce graphique est une généralisation du précédent en évaluant $2x - 3 \leq y \leq 8 - x$ pour toutes les valeurs de $x \leq \frac{11}{3}$.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.5 RESOUDRE le système d'équations associé au système d'inéquations du premier degré à deux variables (suite).	IV	 - Il découle de tout ceci que l'on devra se contenter, au second cycle du secondaire d'une recherche graphique de la solution d'un système d'inéquations bien que l'ensemble-solution du système d'équations qui lui est associé puisse être trouvé à l'aide d'une méthode algébrique par l'élève.
1.5.6 TRADUIRE en inéquations les contraintes d'un problème d'optimisation.	V	- Voici les étapes à suivre pour l'atteinte de cet objectif: - lecture du problème; - détermination des variables; - écriture des inéquations respectant les données.

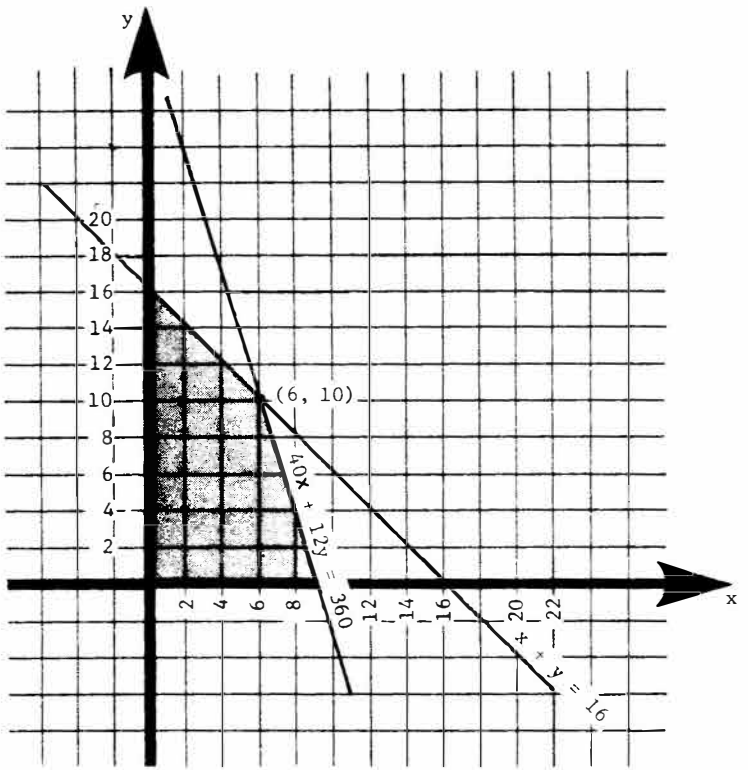
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.6 TRADUIRE en inéquations les contraintes d'un problème d'optimisation (suite).	V	- La lecture du commentaire de l'objectif général 1, portant sur la résolution du problème, peut fournir des informations pertinentes à ce sujet. - Dans cette phase de mathématisation, le système d'inéquations ainsi créé constitue le modèle mathématique décrivant la situation considérée. - Généralement, dans l'énoncé d'un problème, une phrase ou une partie de phrase peut être associée à une contrainte; les variables étant bien identifiées, il est alors relativement facile d'exprimer cette contrainte à l'aide d'une inéquation. De plus, on peut affirmer que la fonction à optimiser se trouve généralement dans la question du problème. Voici un exemple. Un enseignant a la responsabilité d'organiser le transport des élèves de son école afin de leur permettre d'assister à un match de football. Il peut utiliser deux types d'autobus: des grands et des petits. Il peut de plus retenir les services d'au plus 16 chauffeurs. S'il possède un budget total de 360 $ et si la location des autobus coûte respectivement 40 $ et 12 $ pour un grand et pour un petit autobus, combien de véhicules de chaque

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.6 TRADUIRE en inéquations les contraintes d'un problème d'optimisation (suite).	V	sorte devra-t-il utiliser s'il veut transporter le plus grand nombre possible d'élèves en sachant qu'un grand autobus comprend 50 sièges et qu'un petit en comprend 20? - L'identification des contraintes peut être parfois ardue à cause de la nature même du problème ou de sa formulation. Ici, on convient d'appeler x le nombre de grands autobus; y le nombre de petits autobus. Le nombre d'autobus doit être supérieur ou égal à zéro. $x \geq 0$ $y \geq 0$ Il y a au plus 16 chauffeurs. $x + y \leq 16$ Coût du transport: $40x + 12y \leq 360.$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.6 TRADUIRE en inéquations les contraintes d'un problème d'optimisation (suite).	V	- Le modèle mathématique décrivant les contraintes du problème correspond au système d'inéquations $x \geq 0$ $y \geq 0$ $x + y \leq 16$ $40x + 12y \leq 360$ - Utiliser une grande variété de situations afin que l'élève acquiert une certaine habileté à découvrir les modèles mathématiques sous-jacents en identifiant bien les contraintes inhérentes aux problèmes analysés. Voici un second exemple. Pour recueillir des fonds pour le bal des finissants, une équipe décide de composer et de vendre des albums souvenir. Elle dispose de 700 dessins originaux, de 1440 poèmes et de 750 pages de photos diverses. La composition d'un album de luxe comprend 5 dessins, 6 poèmes et 5 pages de photos, celle d'un album régulier, 2 dessins, 9 poèmes et 3 pages de photos. Combien d'albums de chaque sorte peut-on fabriquer pour obtenir le plus de fonds possible si un album de luxe et un album

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.6 TRADUIRE en inéquations les contraintes d'un problème d'optimisation (suite).	V	régulier rapportent respectivement un profit de 3,00 $ et de 2,00 $? Soit x le nombre d'albums de luxe; y le nombre d'albums réguliers. Le nombre d'albums est un nombre naturel supérieur ou égal à zéro. $x \geq 0$ $y \geq 0$ Le nombre maximum d'albums sera établi par: $x \leq \frac{700}{5} = 140$ $x \leq \frac{1440}{6} = 240$ $x \leq \frac{750}{5} = 150$  d'où: $x \leq 140$ en considérant les albums de luxe. $y \leq \frac{700}{2} = 350$ $y \leq \frac{1440}{9} = 160$ $y \leq \frac{750}{3} = 250$  d'où: $y \leq 160$ en considérant les albums réguliers.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.6 TRADUIRE en inéquations les contraintes d'un problème d'optimisation (suite).	V	- Le modèle mathématique associé aux contraintes de ce second exemple est représenté par le système d'inéquations: $x \geq 0$ $y \geq 0$ $x \leq 140$ $y \leq 160$ $5x + 2y \leq 700$ $6x + 9y \leq 1440$ $5x + 3y \leq 750$
1.5.7 TRACER le polygone de contraintes délimité par un système d'inéquations.	V	- Cet objectif est une généralisation de l'objectif 1.5.2 et il exige la maîtrise de toutes les habiletés requises pour son atteinte. - Les notes didactiques complémentaires présentent différentes façons de construire la représentation graphique du polygone de contraintes. - Le système d'inéquations obtenu au premier exemple à l'objectif 1.5.6 permet d'obtenir le polygone de contraintes de la page suivante.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.7 TRACER le polygone de contraintes délimité par un système d'inéquations (suite).	V	$x \geq 0$ $y \geq 0$ $x + y \leq 16$ $40x + 12y \leq 360$  - L'intersection de demi-plans (9, 0) fournit toujours un polygone de contraintes connexé.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.7 TRACER le polygone de contraintes délimité par un système d'inéquations (suite).	V	- Le système d'inéquations associé au second exemple (objectif 1.5.6) permet d'obtenir le polygone de contraintes.

$x \geq 0$

$y \geq 0$

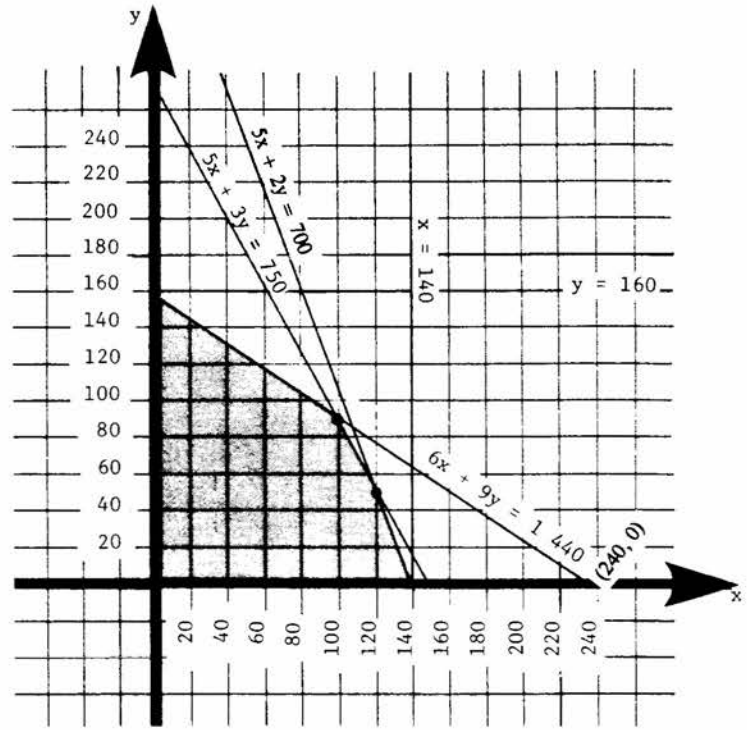
$x \leq 140$

$y \leq 160$

$5x + 2y \leq 700$

$6x + 9y \leq 1440$

$5x + 3y \leq 750$



OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.7 TRACER le polygone de contraintes délimité par un système d'inéquations (suite).	V	On observera ici l'inutilité des contraintes $x \leq 140$ $y \leq 160$ et le modèle mathématique pourrait se réduire au système $x \geq 0$ $y \geq 0$ $5x + 2y \leq 700$ $6x + 9y \leq 1440$ $5x + 3y \leq 750$
1.5.8 VERIFIER si un point appartient au polygone de contraintes.	V	- Faire observer à l'élève que tous les points se trouvant à l'intérieur du polygone de contraintes vérifient simultanément toutes les inéquations du système tandis qu'un point pris à l'extérieur du polygone n'appartient pas à l'ensemble-solution associé au système. - Cette vérification peut s'effectuer à l'aide de substitutions. - En utilisant le premier modèle, on pourrait faire la vérification pour les couples suivants (0, 0), (4, 13), (6, 10), (6, 8) et (8, 6).

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.8 VERIFIER si un point appartient au polygone de contraintes (suite).	V	

	(0, 0)	(4, 13)	(6, 10)	(6, 8)	(8, 6)
$x \geq 0$	V	V	V	V	V
$y \geq 0$	V	V	V	V	V
$x + y \leq 16$	V	F	V	F	F
$40x + 12y \leq 360$	V	V	V	F	F
Appartenance au polygone de contraintes	V	F	V	F	F

Les couples (0, 0) et (6, 10) appartiennent à la région polygonale déterminée par le système d'inéquations.

- La vérification des couples (0, 0), (1, 150), (50, 75), (75, 50) et (150, 50) dans le second modèle donne

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.8 VERIFIER si un point appartient au polygone de contraintes (suite).	V	

	(0, 0)	(1, 150)	(50, 75)	(75, 50)	(150, 50)
$x \geq 0$	V	V	V	V	V
$y \geq 0$	V	V	V	V	V
$x \leq \frac{350}{3}$	V	V	V	V	F
$y \leq 150$	V	V	V	V	V
$5x + 2y \leq 700$	V	V	V	V	F
$6x + 9y \leq 1\ 440$	V	V	V	V	V
$5x + 3y \leq 750$	V	V	V	V	F
Appartenance au polygone de contraintes	V	V	V	V	F

Les couples (0, 0), (1, 150), (50, 75) et (75, 50) appartiennent à la région polygonale déterminée par le système d'inéquations.

- Les sommets du polygone de contraintes sont appelés les points critiques du polygone. On les obtient par la résolution des systèmes d'inéquations appropriés.

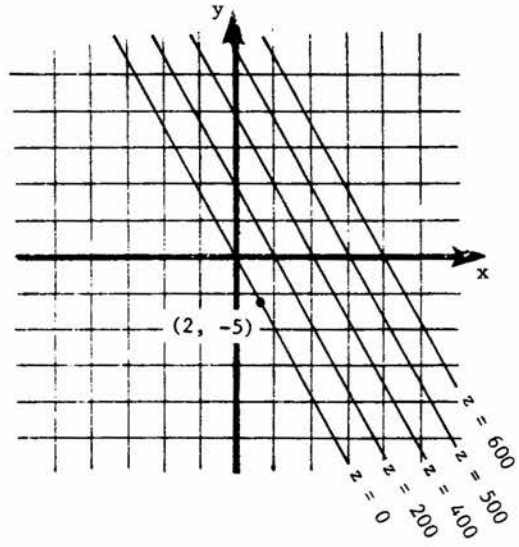
- Dans le premier exemple, les points critiques sont

(0, 0); il provient du système $x = 0$
$y = 0$

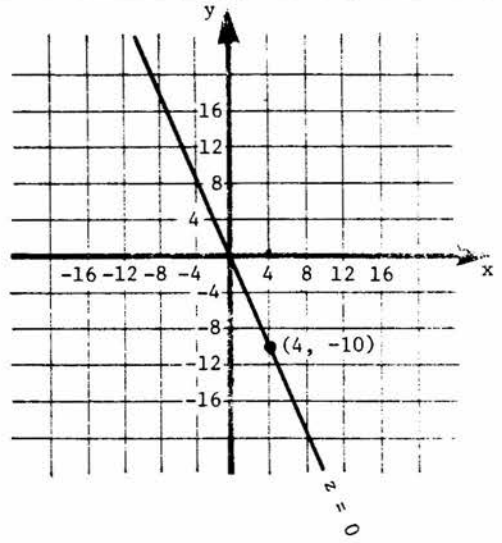
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.8 VERIFIER si un point appartient au polygone de contraintes (suite).	V	(0, 16); il provient du système $x = 0$, $x + y = 16$ (6, 10); il provient du système $x + y = 16$, $40x + 12y = 360$ (9, 0); il provient du système $y = 0$, $40x + 12y = 360$ - Dans le second exemple, les points critiques sont (0, 0); il provient du système $x = 0$, $y = 0$ (0, 160); il provient du système $x = 0$, $6x + 9y = 1440$ (90, 100); il provient du système $6x + 9y = 1440$, $5x + 3y = 750$ (120, 50); il provient du système $5x + 3y = 750$, $5x + 2y = 700$ (140, 0); il provient du système $5x + 2y = 700$, $y = 0$ - Les points critiques d'un polygone de contraintes sont tous solutions du système d'inéquations qui le définit.

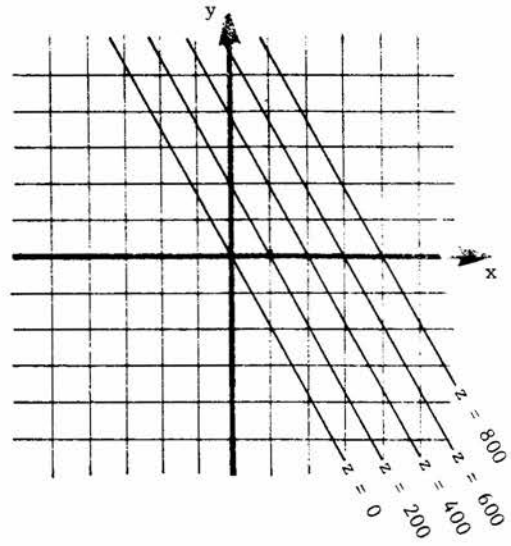
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.8 VERIFIER si un point appartient au polygone de contraintes (suite).	V	- Il est possible de construire un programme d'ordinateur pour effectuer cette vérification. Le programme BASIC suivant est associé à la situation énoncée ci-dessous. Lydia achète une rose et un oeillet pour moins de 7 $; si elle se procure deux autres roses et vend son oeillet, elle doit débourser au moins 3 $. Combien peut-elle avoir payé pour une rose et un oeillet? Le modèle mathématique associé à ce problème est: Soit x le prix d'une rose y le prix d'un oeillet $x \geq 0$ $y \geq 0$ $x + y \leq 7$ $2x - y \geq 3$ et le programme BASIC pourrait être:

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.8 VERIFIER si un point appartient au polygone de contraintes (suite).	V	10 CLS 20 INPUT "Indique le prix d'une rose."; X 30 INPUT "Indique le prix d'un oeillet."; Y 40 IF X>=0 AND Y>=0 and X+Y<=>AND 2*X-Y>=3 THEN 70 50 PRINT "Elle ne peut avoir payé ce prix car le couple choisi ne satisfait pas l'ensemble des contraintes définissant le polygone des contraintes." 60 GOTO 80 70 PRINT "Il est possible qu'elle ait payé cette somme car le couple choisi respecte les contraintes définissant le polygone des contraintes." 80 END
1.5.9 TRADUIRE symboliquement la fonction à optimiser.	V	- Un problème de programmation linéaire dans $\mathbb{R}^2$ propose une fonction à optimiser. Cette fonction s'énonce généralement à l'aide de deux variables indépendantes "x" et "y", d'une variable dépendante "z" ou f(x, y) ainsi que de trois paramètres "A", "B" et "C". Cette fonction à optimiser prend la forme z = Ax + By + C ou f(x, y) = Ax + By + C. La question énoncée dans le premier problème (objectif 1.5.6) étant "... combien de véhicules de chaque sorte devra-t-il utiliser s'il veut transporter le plus grand nombre possible d'élèves en sachant qu'un grand autobus possède 50 sièges et qu'un petit en contient 20?", la recherche du nombre de véhicules de chaque sorte permettant d'optimiser (de maximiser) le nombre d'élèves permet de construire la fonc-

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.9 TRADUIRE symboliquement la fonction à optimiser (suite).	V	tion de rendement ou la fonction à optimiser; celle-ci peut s'écrire $z = 50x + 20y$ La représentation graphique de cette fonction fournit des droites parallèles dont la position dans le plan détermine la valeur de z.  - Voici la façon de procéder afin de déterminer la direction de la fonction à optimiser ainsi que quelques éléments (quelques droites) appartenant à cette direction.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.9 TRADUIRE symboliquement la fonction à optimiser (suite).	V	1. poser z = 0; z = 50x + 20y devient 50x + 20y = 0 ce qui permet d'affirmer que la droite associée à cette équation passera par l'origine (revoir à ce sujet l'objectif 1.3.1); 2. transformer 50x + 20y = 0; ainsi 50x + 20y = 0 20y = -50x y = -2,5x 3. trouver un autre couple de cette droite (exemple: (4, -10)); 4. tracer d'autres éléments (d'autres droites) de cette direction;

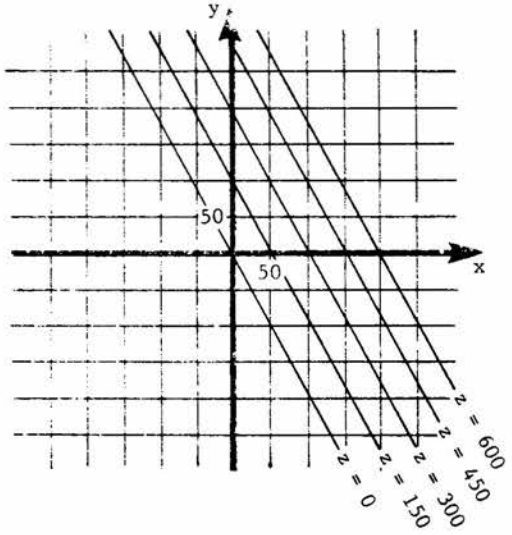




OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.9 TRADUIRE symboliquement la fonction à optimiser (suite).	V	5. trouver la valeur de z pour chaque droite tracée en substituant dans $z = 50x + 20y$ les composantes d'un couple associé à un point situé sur cette droite; il est avantageux de choisir les points à l'intersection de ces droites avec l'axe des x:

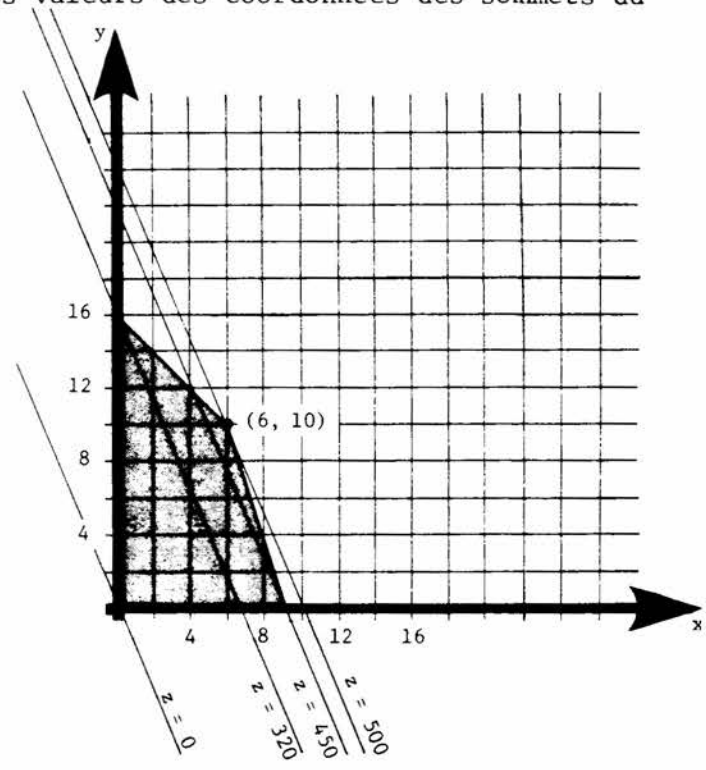
(x, y)	z
(0, 0)	0
(4, 0)	200
(8, 0)	400
(12, 0)	600
(16, 0)	800

- Une fois que l'élève a découvert la fonction à optimiser, il devrait acquérir l'habileté à la représenter dans le plan cartésien pour un certain nombre de valeurs données de z.
  (Exemple: Pour $z = 50x + 20y$, tracer dans le plan la droite associée à $z = 90$.)
  Il serait avantageux de rappeler à l'élève certains procédés présentés à l'objectif 1.3.3.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.9 TRADUIRE symboliquement la fonction à optimiser (suite).	V	- La question du deuxième problème (objectif 1.5.6) s'énonce "... Combien d'albums de chaque sorte peut-on fabriquer pour obtenir le plus de fonds possible si un album de luxe et un album régulier rapportent respectivement un profit de 3,00 $ et de 2,00 $." Ici, la recherche du maximum de fonds à recueillir que l'on appelle la fonction de rendement ou la fonction à optimiser sera $z = 3x + 2y$ - La représentation graphique de cette fonction fournit des droites parallèles dont la position détermine la valeur de z. 

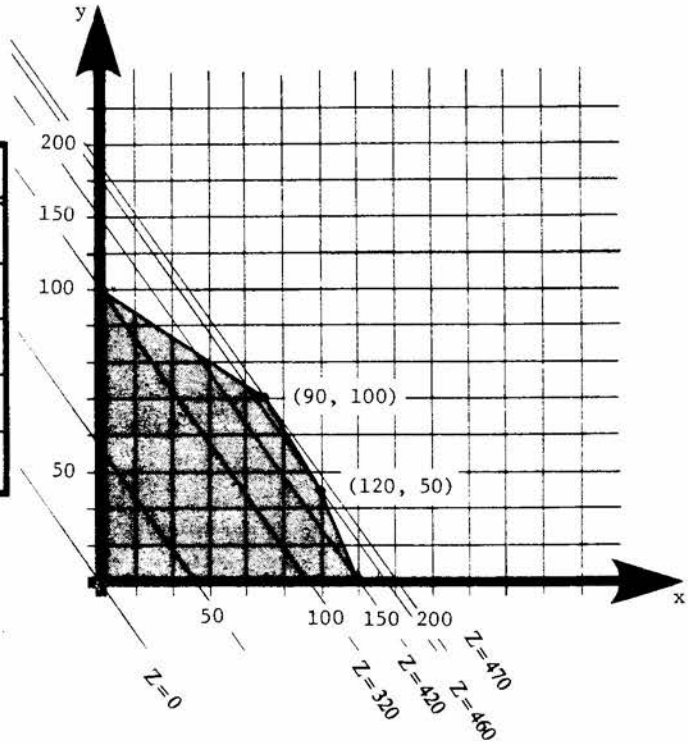
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.10 EVALUER la fonction à optimiser en un sommet du polygone de contraintes.	V	- Evaluer la fonction à optimiser, c'est trouver la valeur de z pour une valeur précise donnée à x et une autre à y. Par exemple, si $z = 50x + 20y$ et que $x = 5$ et $y = 7$, alors l'évaluation de la fonction à optimiser sera $z = 50 \times 5 + 20 \times 7 = 250 + 140 = 390$. On peut également écrire $f(5, 7) = 390$. - Au premier problème (objectif 1.5.6), l'expression $z = 50x + 20y$ prend les valeurs suivantes pour les valeurs des coordonnées des sommets du polygone.

(x, y)	z = 50x + 20y
(0, 0)	0
(0, 16)	320
(6, 10)	500
(9, 0)	450



OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.10 Evaluer la fonction à optimiser en un sommet du polygone de contraintes (suite).	V	- La fonction à optimiser du second problème (objectif 1.5.6) étant $z = 3x + 2y$, son évaluation pour les valeurs des coordonnées des sommets du polygone sera

(x, y)	z = 3x + 2y
(0, 0)	0
(0, 160)	320
(90, 100)	470
(120, 50)	460
(140, 0)	420



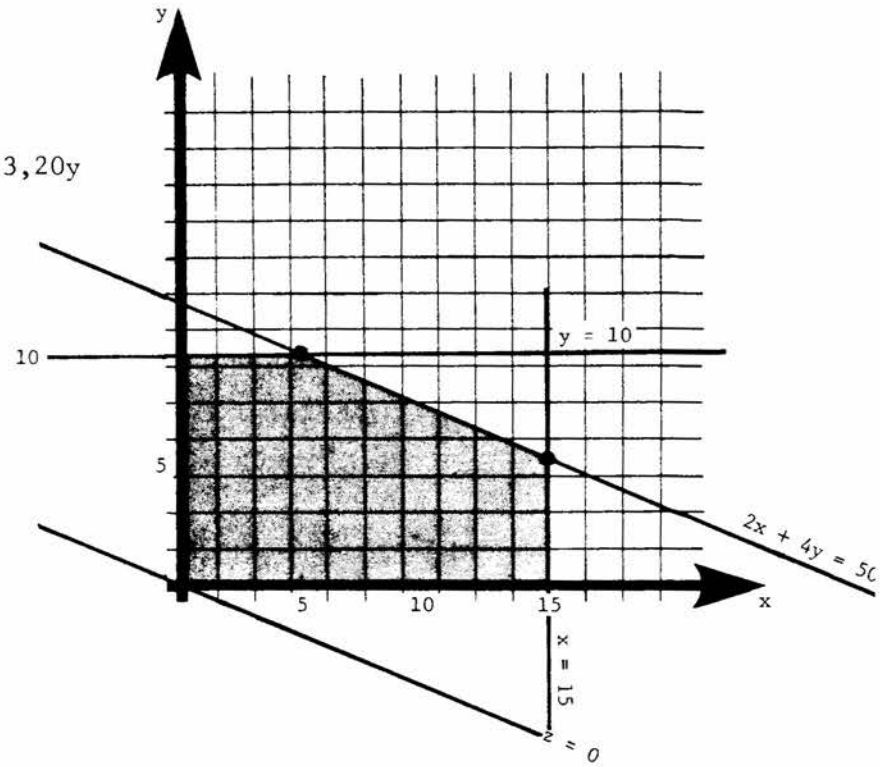
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.11 IDENTIFIER les valeurs qui optimisent la fonction.	V	- Une fonction est optimale lorsque son évaluation fournit une valeur maximum ou minimum selon le cas. - Dans le premier tableau (objectif 1.5.10), on observe que z est maximum lorsque x = 6 et y = 10; ceci signifie que dans le premier exemple (objectif 1.5.6) l'enseignant devra, s'il désire transporter le plus grand nombre d'élèves, choisir 6 grands autobus et 10 petits. Graphiquement, il est possible de vérifier l'exactitude de ce résultat. - Il est évident que z pourrait prendre une infinité de valeurs plus grandes que 500. Cependant, dans un tel cas, la droite associée à la fonction à optimiser ne coupe plus le polygone de contraintes et les couples (x, y) qui caractérisent chacun des points de la droite ne vérifient plus le système d'inéquations. - Il est possible de faire découvrir à l'élève le théorème suivant: si elle existe, la valeur optimale de la fonction à optimiser se trouve en au moins un sommet du polygone de contraintes. - De ce théorème, il est possible d'en faire découvrir un autre: si une droite associée à une fonction à optimiser optimise cette fonction en deux sommets consécutifs

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.11 IDENTIFIER les valeurs qui optimisent la fonction (suite).	V	d'un polygone de contraintes, alors tous les points se trouvant sur le segment joignant ces sommets optimisent la fonction. - La mise en situation suivante illustre ce dernier énoncé. Pour effectuer un certain travail, une entreprise doit recourir aux services d'au plus 15 apprentis électriciens et 10 électriciens. Ce travail ne doit en aucun cas dépasser 50 heures/hommes tout en sachant que chaque apprenti doit travailler 2 heures et chaque électricien 4 heures. Trouver le nombre d'employés de chaque catégorie que la compagnie devra engager si elle veut maximiser le montant du contrat et si elle demande 21,60 $ l'heure pour un apprenti et 43,20 $ l'heure pour un électricien. Voici le modèle mathématique et la représentation graphique associés à cette situation. Soit x le nombre d'apprentis, y le nombre d'électriciens.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.11 IDENTIFIER les valeurs qui optimisent la fonction (suite).	V	$x \leq 15$ $y \leq 10$ $2x + 4y \leq 50$ $z = 21{,}60x + 43{,}20y$

L'évaluation de z en chaque sommet du polygone donne

(x, y)	z
(0, 0)	0
(0, 10)	432
(5, 10)	540
(15, 5)	540
(15, 0)	324



Deux sommets maximisent la fonction, donc tous les points se trouvant sur le segment joignant ces deux sommets maximisent également la fonction.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	DEGRE	COMMENTAIRE
1.5.11 IDENTIFIER les valeurs qui optimisent la fonction (suite).	V	Afin de respecter les contraintes de ce contrat et de maximiser ses revenus, la compagnie pourra choisir l'une des situations suivantes: 5 apprentis et 10 électriciens, 7 apprentis et 9 électriciens, 9 apprentis et 8 électriciens, 11 apprentis et 7 électriciens, 13 apprentis et 6 électriciens, 15 apprentis et 5 électriciens. - Dans le second tableau (objectif 1.5.10), z est maximum lorsque x = 90 et y = 100. Les profits seront donc maximum si on constitue 90 albums de luxe et 100 albums réguliers. Il est possible de vérifier l'exactitude de ce résultat sur le graphique. - L'ordinateur pourrait être utilisé dans la recherche de solutions optimales. La conception d'un programme sur ce sujet pourrait permettre à l'élève d'effectuer une bonne synthèse d'un grand nombre d'objectifs terminaux et intermédiaires sous-jacents au premier objectif général de ce programme d'études.

NOTES DIDACTIQUES COMPLEMENTAIRES

A- Les nombres

Les nombres constituent un puissant outil pour aider l'homme à percer les énigmes de l'univers. Ils véhiculent en eux une sorte de mystère. Ne dit-on pas de 7 qu'il est un nombre chanceux? Plusieurs nombres sont qualifiés de parfaits, triangulaires, carrés, polygonaux, etc. 13 par contre attire la malédiction selon la pensée populaire. Certains édifices publics ne possèdent pas de treizième étage... Que dire des carrés magiques et des suites renfermant des régularités pour le moins surprenantes?

Un peu d'histoire pourrait avantageusement se glisser lors de l'introduction à l'étude des nombres.

De nombreuses fouilles archéologiques ont révélé que la société préhistorique possédait un langage articulé où l'on retrouve un système de numération. Les tribus de cette époque réussissaient à compter en utilisant des symboles descriptifs. Elles utilisaient possiblement la correspondance "un à un". Ainsi les bergers d'alors savaient qu'il leur manquait des moutons quand il restait des pierres dans le tas de contrôle. Ces peuplades utilisaient aussi des traits marqués dans différents matériaux (bois, os, pierre, etc.). Cette utilisation ne signifie pas que le concept de nombre existait dans la pensée de ces peuplades pas plus que sa non-utilisation. Elles utilisaient d'abord leurs doigts pour effectuer du dénombrement, puis elles sont passées à son prolongement en tenant compte des groupements 2, 3 ou 5.

D'ailleurs, il ne faut pas croire que les Romains utilisaient les symboles I, V, X, L, C, D, M, $\overline{D}$, $\overline{M}$, etc. Cette écriture moderne des chiffres romains date du Moyen-Age. Les Romains n'utilisaient que très peu les grands nombres et généralement, ignoraient la barre horizontale comme signifiant des grands nombres. Cette barre servait plutôt à différencier les mots des nombres. Le principe soustractif d'au plus une unité du genre n'était pas d'ailleurs toujours respecté: ainsi on y rencontre IIX pour signifier VIII ou IIXX pour signifier XVIII.

Les chiffres romains semblent respecter les règles de formation suivantes:

1- Tout chiffre situé à droite d'un chiffre de valeur égale ou supérieure est à ajouter à ce dernier.
VI = 6; MLVI = 1 056.

2- Tout chiffre situé à gauche d'un chiffre de valeur supérieure doit être retranché de ce dernier.
IV = 4; XL = 40.

Il faut toutefois être prudent avant de généraliser ces règles, leur interprétation est particulièrement difficile. Ainsi, dans XIV, en appliquant la règle (1), I est ajouté à X alors qu'avec la règle (2), I est retranché de V. On sait pourtant que XIV représente le nombre 14.

Voici la version ancienne des chiffres romains:

I, V, Λ, ⊀, X, ⊕, ı, L, ⊕, ⊕, C, O, Θ, Δ, ⊃, D, CIϢ ⊕, M, Φ et CIↃ

et leur représentation moderne:

I, V, X, L, C, D, M, $\overline{D}$ et $\overline{M}$.

Les Chinois, comme les Grecs, utilisaient deux notations:

a) système multiplicatif

一	=	1
二	=	2
三	=	3
四	=	4
五	=	5
六	=	6
七	=	7
八	=	8
九	=	9
十	=	10
百	=	100
千	=	1000

Les symboles numériques en positions impaires de gauche à droite ou de bas en haut sont multipliés par leur successeur.

Ainsi, 7 534 se représente par:

7 x 1 000	5 x 100	3 x 10	4
七千	五百	三十	四

b) système positionnel

type vertical	I	II	III	IIII	IIIII				
	1	2	3	4	5				
	T	TT	TTT	TTTT					
	6	7	8	9					
type horizontal	–	=	≡	≡̄	≡̄̄	⊥	⊥̄	⊥̄̄	⊥̄̄̄
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

En utilisant ces deux types de symboles alternativement en commençant par les unités (chiffre de droite) qui sont par convention de type vertical, on peut représenter n'importe quel nombre, aussi grand qu'il soit.

5	3	2	4	3	7
≡̄̄̄	III	=	IIII	≡	TT

Les Chinois utilisaient l'abaque comme instrument de calcul rapide.

Voici une généalogie de l'écriture des chiffres de notre système de numération.

ECRITURE ACTUELLE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ECRITURE D'IL Y A 400 ANS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ECRITURE D'IL Y A 1 000 ANS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ECRITURE D'IL Y A 1 500 ANS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ECRITURE D'IL Y A 2 200 ANS	–	=	≡	4	5	6	7	8	9	

Dans plusieurs parties du monde, on retrouve l'utilisation de divers types de groupements. Le tableau suivant montre un ordre de grandeur d'utilisation de différentes bases, notamment rencontrées en Amérique au début du vingtième siècle.

Bases	10	5 ou 5 et 10	20 ou 5 et 20	4	3, 8, 12, 60
% d'utilisation	49	33	10	4	4

De l'analyse de ces systèmes, on peut tirer trois modes d'élaboration de systèmes:

- groupement en additionnant unité par unité,
- groupement en utilisant le principe de répétition (système additif positionnel),
- groupement en respectant le principe de position.

De nos jours, avec l'avènement des outils électroniques, les nombres représentés en base 2 prennent de plus en plus d'importance. Cette base est très précieuse pour l'étude des circuits (logiques, électriques, etc.) et permet de créer facilement des modèles mathématiques décrivant des situations dichotomiques. L'algèbre de Boole constitue alors la structure idéale permettant une telle analyse du réel.

Peu importe la base, les nombres peuvent se regrouper en ensembles selon qu'ils permettent, ou non, certaines opérations. Comme les opérations sont essentielles à tout travail sur les nombre, il importe que l'enseignant en saisisse toute la portée.

Soit un ensemble A. f sera une opération sur A si et seulement si il existe une application de $A \times A$ vers A telle que tout couple de $A \times A$, soumis à cette application, fournisse une réponse dans A.

Symboliquement, on peut définir une opération ainsi:

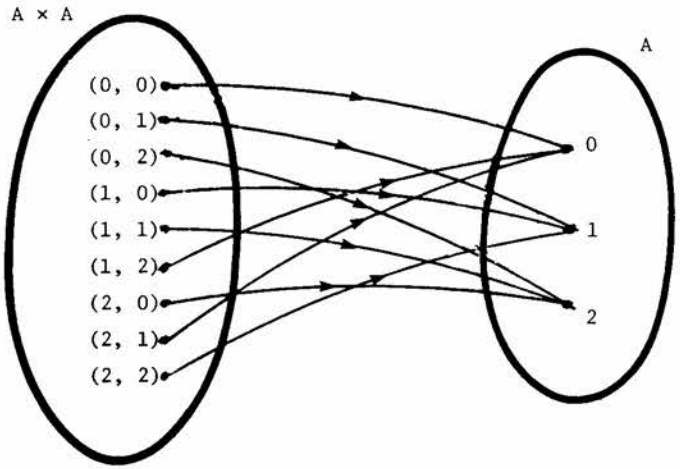
$$\forall x, y, z \in A, f : A \times A \rightarrow A : (x, y) \mapsto z = x \top y$$

Une vérification à l'aide d'un ensemble fini d'éléments, modulo 3 par exemple, va permettre de bien faire ressortir les caractéristiques de cette définition pour l'opération d'addition.

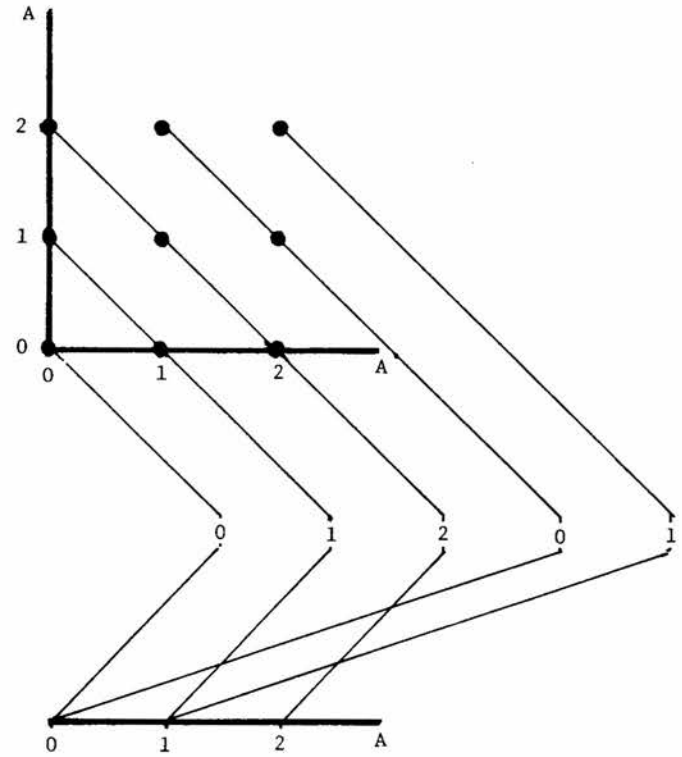
Soit $A = \{0, 1, 2\}$

$$\oplus : A \times A \rightarrow A : (x, y) \mapsto x + y \text{ (modulo 3)}$$

il est alors possible d'établir le graphique sagittal ci-contre:



Le réseau ci-dessous représente la même situation:



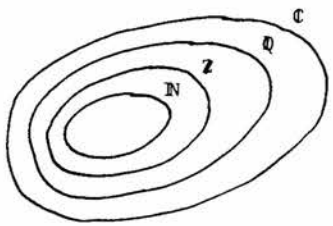
On observe que pour tout couple d'éléments de A, la réponse se retrouve dans A. On parle alors d'opération ou de loi de composition interne sur l'ensemble A.

En plus des nombreuses opérations que l'on peut définir au gré de la fantaisie, il existe une opération de base sur les nombres, c'est l'addition. En effet, la multiplication est une addition répétée un certain nombre de fois, la soustraction est l'addition

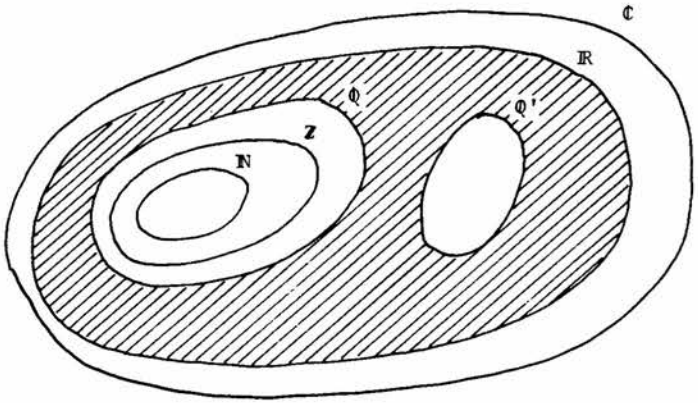
de l'opposé d'un nombre, la division est la multiplication par l'inverse d'un nombre et l'exponentiation est une multiplication répétée. Chacune de ces opérations va permettre d'identifier un ensemble de nombres:

Opérations		Ensembles de nombres
Addition	+	Nombres naturels
Multiplication	×	
Soustraction	-	Nombres entiers
Division	/	Nombres rationnels
Exponentiation	↑	Nombres complexes

Le diagramme de Venn suivant permet de visualiser cette situation:



L'observation permet de plus l'identification de nombres décimaux dont la partie décimale est constituée d'une suite périodique, ces nombres sont tous rationnels. D'autres, au contraire, possèdent une partie décimale constituée d'une suite non périodique, on les appelle nombres irrationnels. L'union de ces deux ensembles de nombres donne l'ensemble des nombres réels. Le diagramme suivant illustre ces précisions.



Le tableau de la page suivante présente une vue d'ensemble des opérations en regard des ensembles de nombres. Le crochet indique que l'opération identifiée est définie sur l'ensemble de nombres considéré.

Opérations	Ensembles de nombres					
	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}'$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
+	✓	✓	✓		✓	✓
×	✓	✓	✓		✓	✓
-		✓	✓		✓	✓
/			✓		✓	✓
↑						✓

Au sujet de l'exponentiation (↑), il faut remarquer que cette opération n'est définie que dans l'ensemble des nombres complexes ($\mathbb{C}$). Cependant, il est possible d'opérer sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. A titre d'exemples, on a $3 \uparrow 2 = 3^2 = 9$, $2 \uparrow \frac{1}{2} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, etc. Bien que la soustraction ne soit pas définie dans $\mathbb{N}$, l'élève du primaire n'exécute-t-il pas des soustractions dans l'ensemble des nombres naturels?

Les opérations d'addition et de multiplication dans $\mathbb{R}$ possèdent certaines propriétés fondamentales qu'il est permis d'appeler axiomes. Voici leur identification et leur définition.

AXIOMES	
Identifications	Définitions
fermeture	$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$: $a + b \in \mathbb{R}$ $a \cdot b \in \mathbb{R}$
associativité	$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
neutre	$\forall\, a \in \mathbb{R}, \exists_1\, b \in \mathbb{R}$: $a + b = a = b + a$ $(b = 0)$ $\forall\, a \in \mathbb{R}, \exists_1\, b \in \mathbb{R}$: $a \cdot b = a = b \cdot a$ $(b = 1)$
symétrique	$\forall\, a \in \mathbb{R}, \exists\, -a \in \mathbb{R}$: $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ $\forall\, a \in \mathbb{R}^*, \exists\, a^{-1} \in \mathbb{R}$: $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$
distributivité	$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $(b + c) \cdot a = a \cdot b + a \cdot c$
communicativité	$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$: $a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$

L'application de ces propriétés permet d'évaluer des expressions numériques complexes. Elles permettent également de résoudre des équations en les transformant, successivement en équations équivalentes. On les utilise alors conjointement avec les propriétés de stabilité et de simplifiabilité.

AXIOMES	
Identifications	Définitions
stabilité	$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$: $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$
simplifiabilité	$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \forall\, c \in \mathbb{R}^*$: $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$

Il est avantageux de représenter l'ensemble des nombres réels sur une droite numérique et d'ordonner chaque élément de l'ensemble. On peut définir la relation d'ordre dans l'ensemble des nombres réels.

ORDRE	
Identifications	Définitions
est inférieur à	$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \forall\, c \in \mathbb{R}^*_+$: $a + c = b \Leftrightarrow a < b$
est inférieur ou égal à	$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \forall\, c \in \mathbb{R}_+$: $a + c = b \Leftrightarrow a \leq b$
est supérieur à	$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$: $a > b \Leftrightarrow b < a$
est supérieur ou égal à	$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$: $a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$

Ces définitions d'ordre permettent de définir les intervalles dans l'ensemble des nombres réels.

Identifications	Représentations		Définitions
intervalle fermé	$[a, b]$	a b $\mathbb{R}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
intervalle ouvert	$]a, b[$	a b $\mathbb{R}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
intervalle semi-ouvert à droite	$[a, b[$	a b $\mathbb{R}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
intervalle semi-ouvert à gauche	$]a, b]$	a b $\mathbb{R}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Les définitions de l'ordre sur les nombres réels utilisées conjointement avec les axiomes sur les nombres réels et les axiomes d'ordre énoncés ci-dessous permettent de transformer des inéquations en inéquations équivalentes.

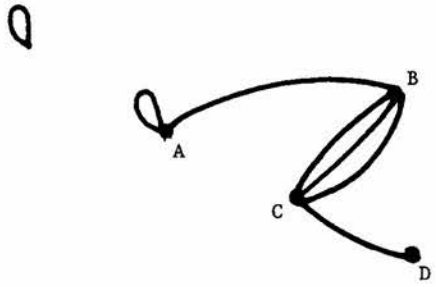
AXIOMES	
Identifications	Définitions
stabilité	$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}: \quad a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$
simplifiabilité	$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \forall\, c \in \mathbb{R}_+^*: \quad a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c$
	$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \forall\, c \in \mathbb{R}_-^*: \quad a < b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c$

Il ne reste plus qu'à se donner un certain nombre de théorèmes relatifs à l'opération d'exponentiation pour obtenir une algèbre sur les nombres qui soit suffisamment efficace pour permettre la mathématisation de situations et l'opération sur les modèles créés. Voici les théorèmes qui caractérisent l'opération d'exponentiation.

THÉORÈMES
$\forall a \in \mathbb{R}: \; a \uparrow 0 = a^{0} = 1$
$\forall a \in \mathbb{R}^{*}: \; a \uparrow -1 = a^{-1} = \frac{1}{a}$
$\forall a \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{Q}: \; a \uparrow m \times a \uparrow n = a^{m} \times a^{n} = a^{m+n}$
$\forall a \in \mathbb{R}^{*}, \forall n, n \in \mathbb{Q}: \; \frac{a \uparrow m}{a \uparrow n} = \frac{a^{m}}{a^{n}} = a^{m-n}$
$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}^{+}, \forall m \in \mathbb{Q}: \; (\frac{a}{b}) \uparrow m = (\frac{a}{b})^{m} = \frac{a^{m}}{b^{m}}$
$\forall a \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{Q}: \; (a \uparrow m) \uparrow n = (a^{m})^{n} = a^{m \times n}$
$\forall a \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{Z}: \; a \uparrow \frac{m}{n} = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^{m}}$

B- Les matrices

Il se produit fréquemment qu'une situation puisse se traduire par un réseau ou un graphe. Le passage ensuite à une écriture sous forme de matrices est alors pratiquement un jeu. Il suffit en effet de compter le nombre de "chemins" reliant deux "noeuds" du réseau. Ainsi,



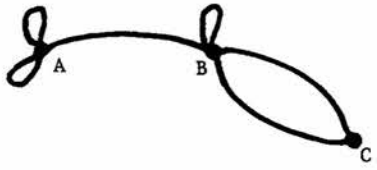
s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & 1 & 1 & 0 & 0 \\ B & 1 & 0 & 3 & 0 \\ C & 0 & 3 & 0 & 1 \\ D & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

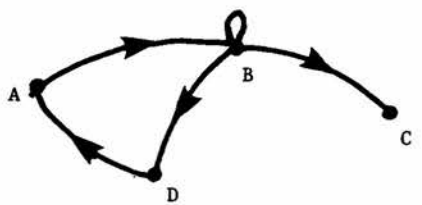
et inversement la matrice

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 2 & 1 & 0 \\ B & 1 & 1 & 2 \\ C & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

correspond au réseau



Cette écriture est aussi valable s'il s'agit de réseaux où les "chemins" sont munis de flèches de direction.



la matrice correspondante est

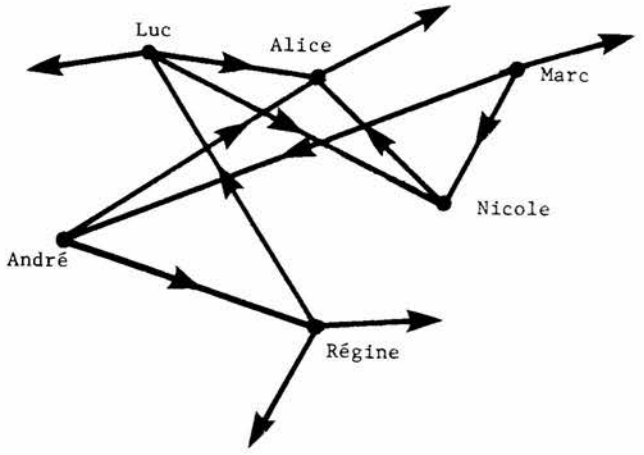
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

L'habileté à mathématiser est aussi développée lorsqu'il s'agit d'enregistrer des données, de construire des tableaux de données ou d'entreposer des informations à l'aide de matrices. Exemple: un laitier peut parfaitement noter ses ventes de la semaine ainsi:

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & 0 & 5 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

En effet, il sait par exemple que chaque colonne désigne un jour de la semaine (L, M, M, J, V, S) et que chaque ligne désigne un client noté dans un ordre correspondant possiblement à son itinéraire.

Cette habileté à mathématiser est aussi développée, par exemple, lors de l'établissement d'un sociogramme comme la recherche des camarades de travail préférés.



$$
\begin{array}{c}
\\ \text{Luc} \\ \text{Alice} \\ \text{André} \\ \text{Marc} \\ \text{Nicole} \\ \cdot \\ \cdot
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \text{Luc} & \text{Alice} & \text{André} & \text{Marc} & \text{Nicole} & \ldots \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

... préfère travailler avec...

Cependant, l'écriture sous forme matricielle ne conduit pas nécessairement à des habiletés mathématiques à moins qu'elle ne débouche sur un traitement mathématique et l'interprétation des résultats. Une mise en situation par exemple pourrait se greffer au thème "achats et ventes".

Exemple:

Un marchand de souliers a en inventaire à la fin de septembre

		Types		
		A	B	C
Pointures	20	4	2	3
	22	1	3	5
	24	3	1	5

En octobre, il achète

		Types		
		A	B	C
Pointures	20	1	3	1
	22	4	0	1
	24	0	2	0

Au cours du mois, il vend

		Types		
		A	B	C
Pointures	20	3	2	2
	22	2	1	1
	24	1	0	1

Quel est son inventaire à la fin d'octobre? Quelle est la valeur de ses biens sachant qu'il paie 32,00 $ une pointure du type A, 20,00 $ une pointure du type B et 12,00 $ une pointure du type C et sachant qu'il vend 45,00 $ une pointure du type A, 29,00 $ une pointure du type B et 19,00 $ une pointure du type C? Quel est le gain réalisé?

Solutions

a) Inventaire

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Valeurs des biens

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 45 \\ 29 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \times 45) + (3 \times 29) + (2 \times 19) \\ (3 \times 45) + (3 \times 29) + (2 \times 19) \\ (2 \times 45) + (3 \times 29) + (4 \times 19) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 215 \\ 260 \\ 253 \end{bmatrix} = 728{,}00\ \$$$

c) Ventes du mois

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 45 \\ 29 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3 \times 45) + (2 \times 29) + (2 \times 19) \\ (2 \times 45) + (1 \times 29) + (1 \times 19) \\ (1 \times 45) + (0 \times 29) + (1 \times 19) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 212 \\ 138 \\ 64 \end{bmatrix} = 414{,}00\ \$$$

d) <u>Achats du mois</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \times 32) + (3 \times 20) + (1 \times 12) \\ (4 \times 32) + (0 \times 20) + (1 \times 12) \\ (0 \times 32) + (2 \times 20) + (0 \times 12) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 \\ 140 \\ 40 \end{bmatrix} = 284{,}00\ \$$$

e) <u>Gain</u>

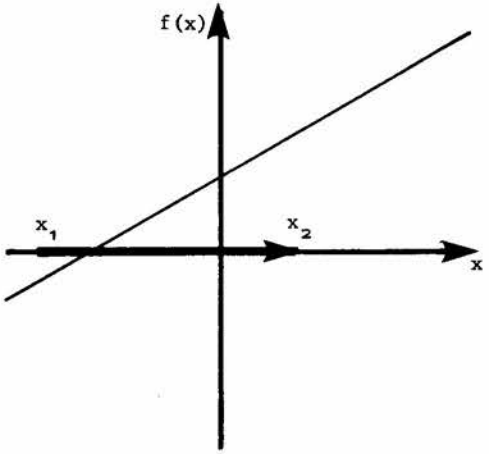
414,00 $ - 284,00 $ = 130,00 $

Après l'étude des sujets précédents, on peut envisager d'appliquer cette notion à la géométrie puisque l'écriture algébrique des matrices permet l'étude des transformations planes. La connaissance des réflexions, des translations, des rotations, de la géométrie analytique et de la trigonométrie permet d'explorer davantage les matrices et de construire une représentation matricielle du groupe euclidien des isométries. Ce sujet est objet d'exploration dans les transformations présentées à l'objectif général 2.

C- Les fonctions affines

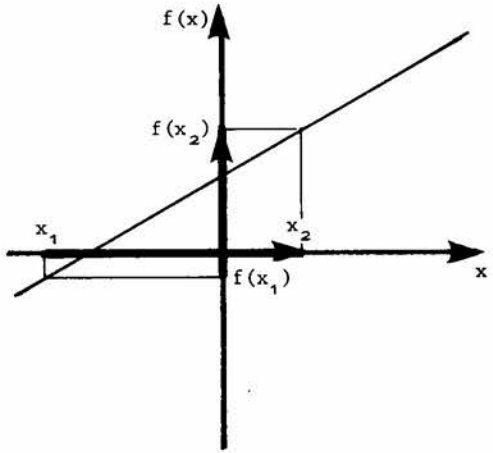
L'étude de la pente d'une fonction affine de la forme $f(x) = mx + b$ peut permettre de multiples applications surtout si on l'aborde sous l'aspect de variation.

Dans le graphique ci-contre d'une fonction affine, il est possible de faire varier la valeur de "x" positivement en passant de x_1 vers x_2. Cette variation peut s'exprimer par Δx, c'est-à-dire $x_2 - x_1$.



Une telle variation des valeurs attribuées à "x" provoque une variation des valeurs attribuées à "y". Cette variation est visualisée dans le graphique ci-contre et peut s'exprimer par $\Delta f(x)$ ou $f(x_2) - f(x_1)$. Le taux de variation s'obtient alors en établissant le quotient

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$



ce qui est équivalent à:

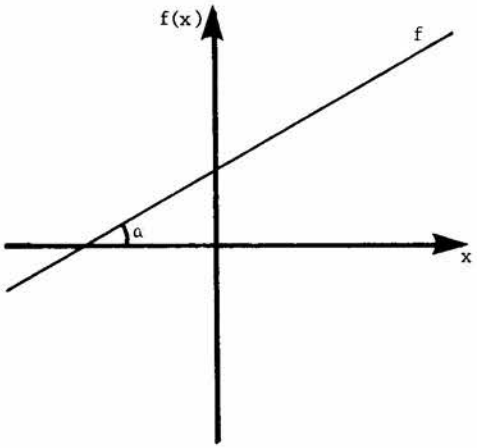
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ou à:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

C'est ce taux de variation qui donne la pente. On l'appelle parfois "rapport de proportionnalité directe". Pour une fonction donnée, ce taux est constant et unique.

Il existe également un lien entre ce taux de variation (la pente) et l'angle que forme la droite associée à la fonction $f(x) = mx + b$ avec l'axe des "x". Cet angle s'appelle "angle directeur". Il serait possible de faire découvrir ce lien de la façon suivante:



1. Fournir à l'élève une fonction affine et lui demander d'en tracer le graphique cartésien d'une façon très précise;
2. faire évaluer le taux de variation de cette fonction à partir du graphique cartésien de celle-ci;

3. faire mesurer au degré le plus près, à l'aide d'un rapporteur d'angle, l'angle directeur associé à cette fonction;

4. à l'aide d'une calculatrice de poche, faire rechercher la valeur de la tangente de l'angle directeur (il faut prendre soin de vérifier si la calculatrice est au mode "degré" ou au mode "radian";

5. faire comparer le résultat obtenu à l'aide de la calculatrice et l'évaluation du taux de variation.

L'élève doit arriver à la conclusion que:

$$\tan \alpha \approx \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{ou} \quad \tan \alpha \approx m$$

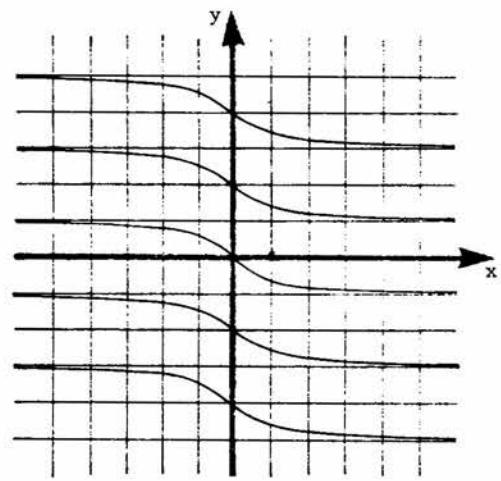
Si le maître fait évaluer la moyenne des taux de variation obtenus par tous les élèves de sa classe ainsi que la moyenne des valeurs de tan α, il est possible d'induire que

$$\tan \alpha \approx m.$$

A partir de l'étude du graphique cartésien d'un certain nombre de fonctions affines de la forme $f(x) = mx + b$, il est possible d'observer que si:

- $\alpha = 0^{o}$, alors $m = 0$;
- α tend vers 90°, alors m tend vers une valeur infiniment grande;
- $\alpha = 90^{o}$, alors m n'est pas définie (la calculatrice le montre bien);
- $\alpha > 90^{o}$ et α tend vers 180°, alors m tend vers 0 mais négativement;
- $\alpha = 180^{o}$, alors $m = 0$.

Le tracé du graphique cartésien de tous les couples de la forme (x, m) fournit la représentation de tan α.



Une situation qui illustre bien ce concept de fonction affine et son utilité serait le cas d'un automobiliste voyageant de Québec vers Montréal à une vitesse constante de 80 km/h. Il est tout naturel de se demander quelle distance il aura parcourue dans une heure, dans 2,5 heures, dans 3 heures?

Une observation attentive de cette situation permet de dégager le modèle mathématique suivant:

$$\text{distance parcourue} = \text{vitesse} \times \text{temps} \qquad (1)$$

et comme la vitesse est constante, l'espace varie directement en fonction du temps. Cette situation fournit un exemple de fonction de variation directe de la forme $f(x) = mx$. Ici, si v représente la vitesse et t le temps, il serait possible d'écrire:

$$f(t) = vt \qquad (2)$$

Il est nécessaire d'utiliser un minimum de symbolisme afin de simplifier l'écriture et de favoriser une meilleure compréhension de la situation. En effet, l'équation (1), bien que signifiant la même chose que l'équation (2), est beaucoup plus difficile à traiter sur le plan mathématique.

Il est alors possible de mathématiser cette situation en écrivant:

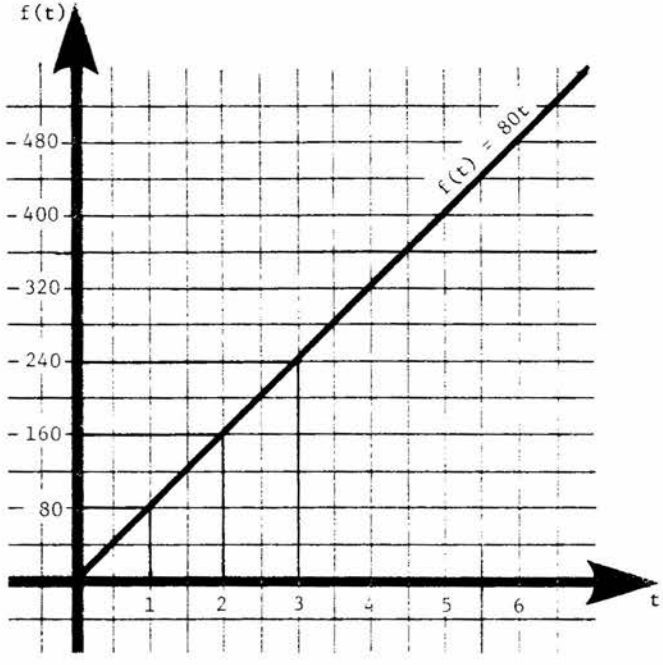
$$f(t) = 80t \qquad (3)$$

La représentation graphique de ce modèle est illustrée ci-contre, et en opérant à l'aide de ce modèle,

$$f(1) = 80 \times 1 = 80$$

$$f(2,5) = 80 \times 2,5 = 200$$

$$f(3) = 80 \times 3 = 240$$



Il ne reste qu'à interpréter les résultats obtenus:

a) après 1 heure, l'automobiliste a parcouru 80 km,
b) après 2,5 heures, l'automobiliste a parcouru 200 km,
c) après 3 heures, l'automobiliste a parcouru 240 km.

Il serait également possible de rechercher le temps pris par l'automobiliste pour effectuer le trajet Québec - Montréal si l'on sait que la distance entre les deux villes est de 267 km.

L'équation (2) devient alors:

$$267 = 80t$$

$$\frac{267}{80} = t$$

$$t = 3{,}3375$$

et l'on peut conclure qu'il faut 3,3375 heures pour franchir 267 km à une vitesse de 80 km/h.

Si cet automobiliste demeure à Rivière-du-Loup et que cette ville est située à 206 km à l'est de Québec, il est probable que celui-ci se demande à quelle distance il se trouve de son domicile lors de son voyage entre Québec et Montréal. Le modèle mathématique de cette nouvelle situation pourrait être:

$$\text{distance parcourue} = \text{vitesse} \times \text{temps} + \begin{array}{l}\text{distance entre}\\ \text{Rivière-du-Loup}\\ \text{et Québec}\end{array} \qquad (4)$$

Il faut remarquer que ce modèle est un exemple de fonction affine: $f(x) = mx + b$. Ici, v représente la vitesse, t le temps et d la distance entre Rivière-du-Loup et Québec. Il est alors possible d'écrire:

$$g(t) = vt + d \qquad (5)$$

Pour rendre ce modèle conforme à la situation présente, il faut écrire:

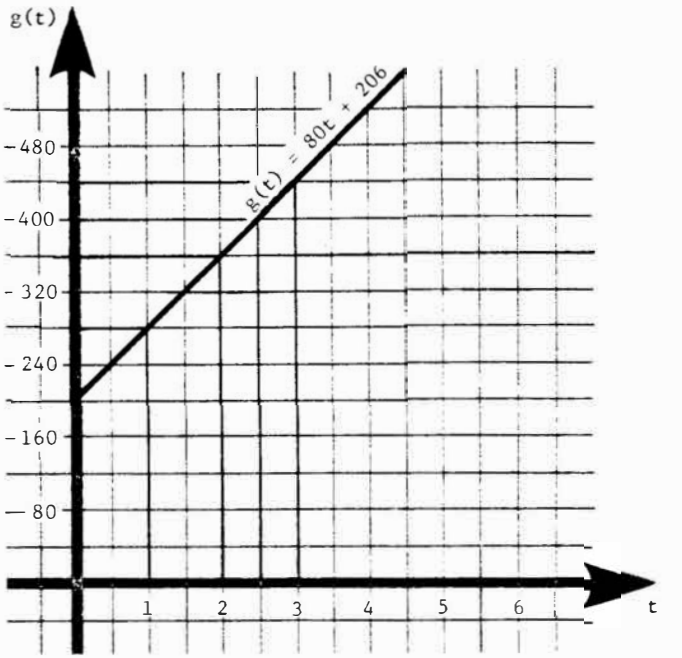
$$g(t) = 80t + 206 \qquad (6)$$

et l'illustration ci-contre représente cette situation. L'évaluation de g(1), g(2,5) et g(3) prendra alors une toute autre signification:

$$g(1) = 80 \times 1 + 206$$
$$= 286$$

$$g(2,5) = 80 \times 2,5 + 206$$
$$= 406$$

$$g(3) = 80 \times 3 + 206$$
$$= 446$$



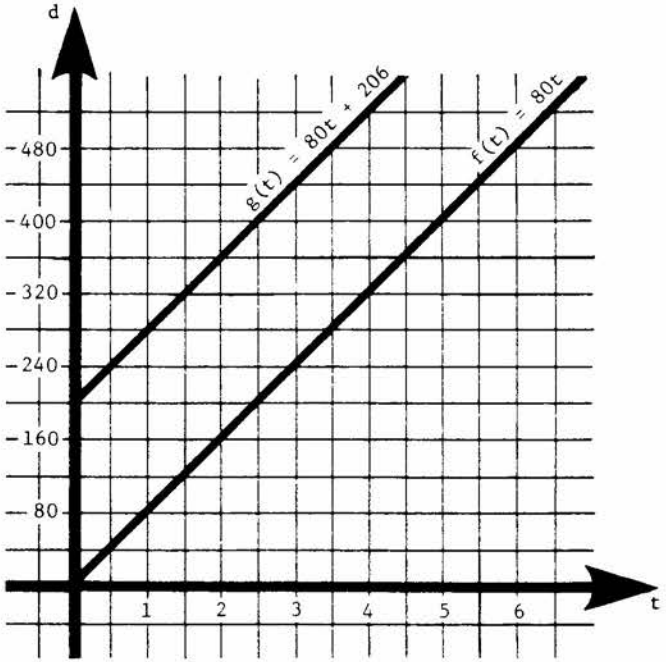
En effet:

a) après 1 heure, l'automobiliste est à 286 km de son domicile,
b) après 2,5 heures, l'automobiliste est à 406 km de son domicile,
c) après 3 heures, l'automobiliste est à 446 km de son domicile.

De plus, g(0) = 206 signifie qu'avant de partir, l'automobiliste se trouve à 206 km de chez-lui.

En superposant les graphiques cartésiens associés aux modèles (3) et (6), il est possible de faire les observations suivantes:

1. Les deux droites sont parallèles.
2. Le taux de variation est identique pour les deux fonctions.
3. Le taux de variation correspond ici à la vitesse.



Il est possible de conclure que le graphique de fonctions affines possédant un taux de variation identique est formé de droites parallèles. En effet,

$$f(t) = 80t \qquad (1)$$

$$g(t) = 80t + 206 \qquad (2)$$

en substituant (1) dans (2):

$$g(t) = f(t) + 206 \qquad (3)$$

et en considérant la fonction (3) on peut mettre en évidence deux choses:

1. Le taux de variation est identique pour les fonctions f et g.
2. Les couples de la fonction g s'obtiennent en ajoutant 206 au deuxième élément des couples de f, en effet:

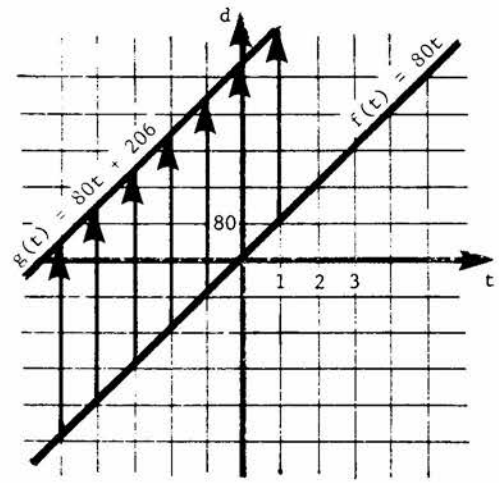
t	f(t)	f(t) + 206	g(t)
0	0	206	206
1	80	286	286
2,5	200	406	406
3	240	446	446

et

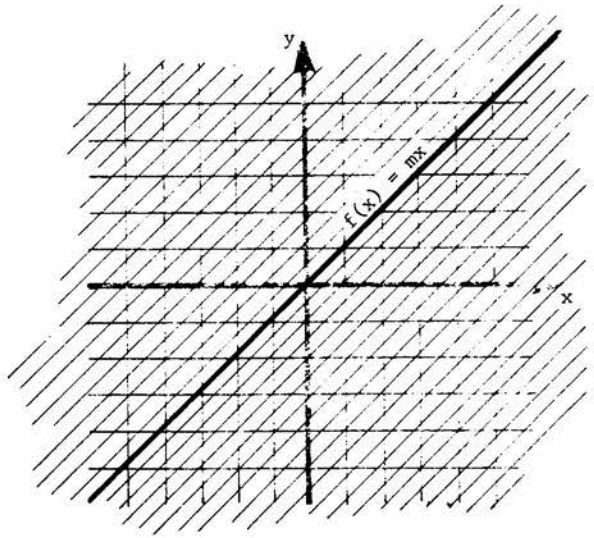
t	(t, f(t))	(t, g(t))
0	(0, 0)	(0, 206)
1	(1, 80)	(1, 286)
2,5	(2,5, 200)	(2,5, 406)
3	(3, 240)	(3, 446)

Une observation attentive des couples du tableau précédent permet de découvrir que:

$$\begin{aligned}(t,\ g(t)) &= (t,\ f(t) + 206)\\ &= (t + 0,\ f(t) + 206)\\ &= (t,\ f(t)) + (0,\ 206)\end{aligned}$$

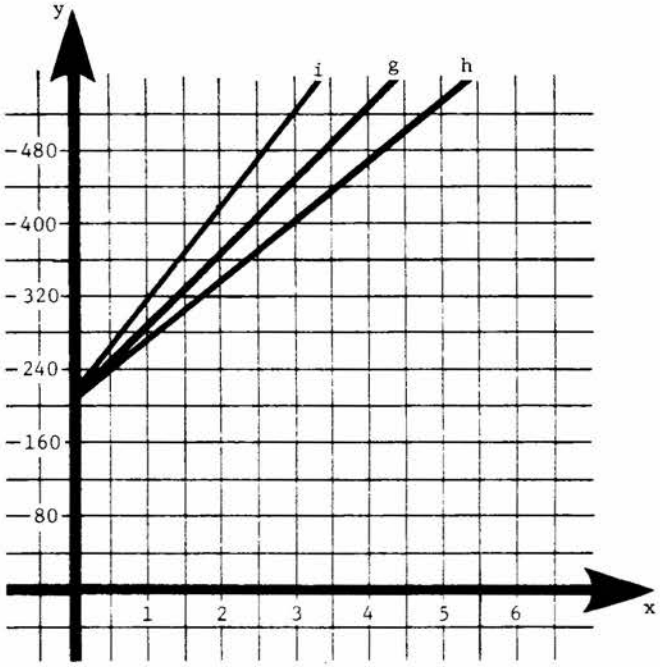


ce qui revient à dire qu'il existe une translation qui permet de "glisser" la droite associée à la fonction f sur la droite associée à la fonction g. L'un des vecteurs de cette translation est (0, 206). Cette observation, il est possible de la généraliser et d'affirmer que $f(x) = mx + b$ est obtenue par une translation de la fonction linéaire $f_1(x) = mx$ et qu'un élément de cette translation est le couple (0, b).



Dans une situation particulière où "m" est constant et où "b" varie, alors $y = mx + b$ définit une famille de droites parallèles que l'on nomme une direction. Ici, $y = 80x + b$ représente cette famille de droites.

L'exemple précédent peut se prolonger en considérant le cas de deux concitoyens de l'automobiliste de Rivière-du-Loup. Tous deux partent également de Québec en direction de Montréal. Le premier roule à une vitesse constante de 70 km/h et le second à une vitesse constante de 90 km/h. Il est alors possible de tracer sur un même plan cartésien le graphique des trois fonctions:



$$g(t) = 80t + 206$$
$$h(t) = 70t + 206$$
$$i(t) = 90t + 206$$

L'observation de ce graphique montre que le taux de variation est différent pour chacune des trois fonctions, mais que les trois droites passent toujours par l'ordonnée à l'origine 206. Encore ici, il est possible de généraliser et de conclure que si "m" varie tout en conservant "b" constant, il y a création d'un faisceau de droites. Ce faisceau constitue un autre type de famille de droites. Ici l'expression $y = mx + 206$ peut être associée à cette famille de droites.

Voici un deuxième exemple. "Un camion-citerne vide a une masse de 3800 kg. Son réservoir cylindrique a une longueur de 6 m et un diamètre de 3 m. L'huile qu'il doit

transporter a une masse de 0,8 kg par litre (la densité de l'huile est de 0,8). Si ce camion doit traverser un pont dont la charge maximum autorisée est de 35 000 kg, alors quelle quantité maximale d'huile ce camion peut-il transporter pour circuler en toute sécurité sur le pont?"

Il est possible de mathématiser cette situation par le modèle suivant:

$0 \leq n \leq 56\ 548{,}667\ 76$	n: nombre de litres du réservoir ($6 \times 3 \times \pi \times 1000 = 56\ 548{,}667\ 76$);
$f(n) = 0{,}8n + 3\ 800$	f(n): la masse du camion pour n litres d'huile;
$f(n) \leq 35\ 000$	charge maximale admise.

A noter également que si la citerne contient 56 548,667 76 litres, alors la masse totale du camion est évaluée à 49 038,934 21 kg car:

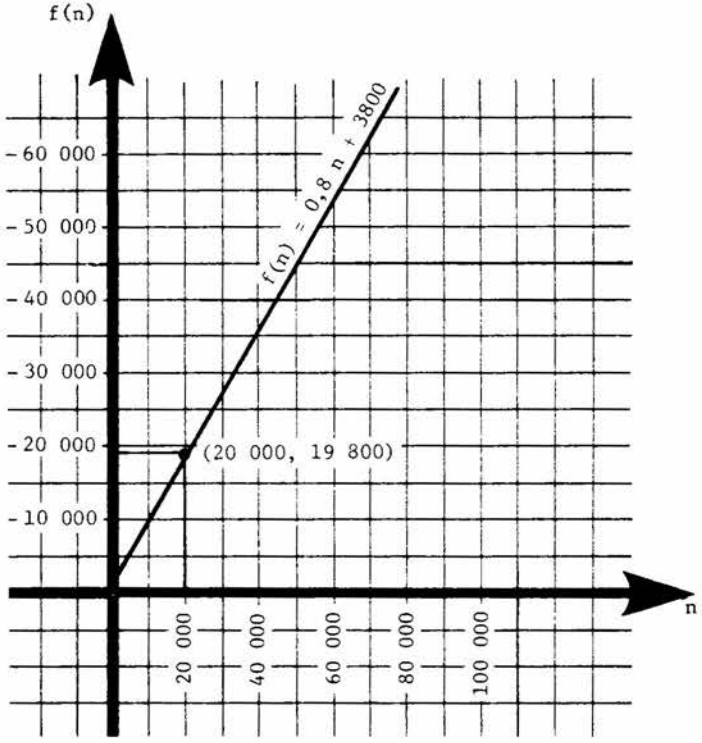
$$\begin{aligned} f(56\ 548{,}667\ 72) &= 0{,}8 \times 56\ 548{,}677\ 72 + 3\ 800 \\ &= 49\ 038{,}934\ 21 \end{aligned}$$

Afin de pouvoir circuler sur le pont, le camion devra avoir comme charge maximum:

$$\begin{aligned} f(n) &= 35\ 000 \\ 0{,}8n + 3\ 800 &= 35\ 000 \\ 0{,}8n &= 31\ 200 \\ n &= 39\ 000 \end{aligned}$$

Ce camion pourra donc transporter 39 000 litres d'huile dans son réservoir.

Si la citerne renferme 20 000 litres d'huile, le modèle permet de savoir que la masse totale du camion sera de 19 800 kg.



Il est possible de trouver de multiples applications de la fonction affine $f(x) = mx + b$. Voici quelques situations:

- tension = résistance × intensité

  $E = RI$ ou IR

- force = masse × accélération

  $f = ma$

- prix de vente = prix unitaire × masse

  $v = um$

- rabais = taux de réduction × prix marqué

  $r = tm$

- intérêt annuel = capital × taux d'intérêt

  $i = ct$

Beaucoup de problèmes de la mathématique du consommateur sont considérés souvent comme des applications de la fonction affine. Sans toutefois entrer dans les subtilités, il y a tout de même lieu de noter certaines différences qui les associent soit à une fonction en escalier soit à une fonction affine sur un intervalle donné.

Voici un exemple illustrant ce dernier cas. La fonction affine

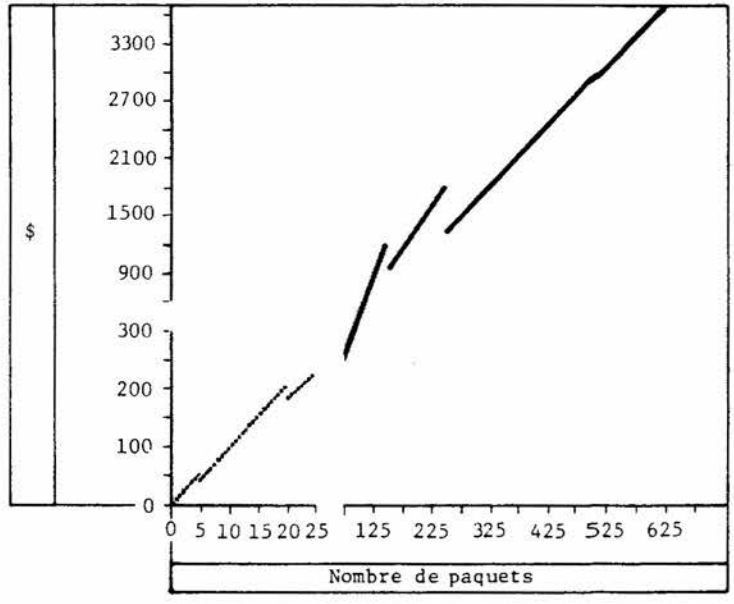
"prix de vente = prix unitaire × masse", $v = um$.

Cette fonction est souvent influencée par les grosses quantités.

Voici des données relatives à cette situation.

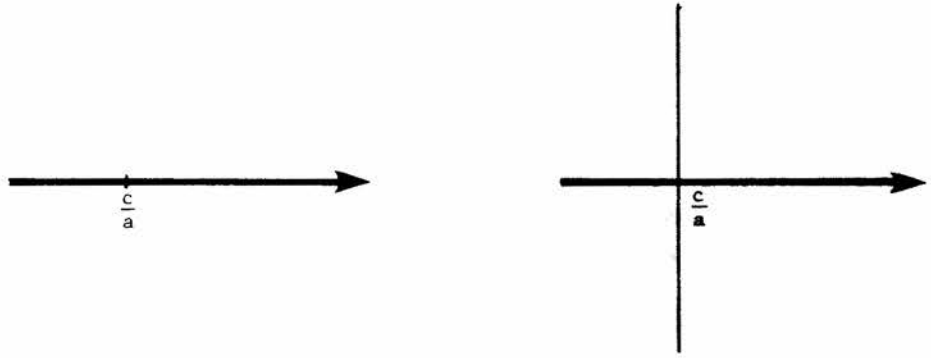
Prix unitaires	Quantités
13,45 $	0 - 4 paquets
11,50 $	1 - 5 cartons (un carton contient 4 paquets)
9,80 $	5 - 24 cartons
7,85 $	24 - 48 cartons
5,97 $	1 - 3 tonnes (une tonne contient 48 cartons)

Le graphique ci-contre illustre cette situation.



D- Les équations

L'expression $ax = c$ est équivalente à $ax + by = c$ pour $b = 0$. Toutefois, la représentation graphique permet de visualiser une nette différence.



Dans un cas l'ensemble-solution est un singleton (un point) et dans l'autre un ensemble renfermant une infinité d'éléments (une droite).

Les techniques de résolution d'un système d'équations sont fort différentes de celles servant à solutionner une équation à une inconnue. De plus, ces techniques sont très diversifiées. Les pages suivantes présentent un système dont la solution est recherchée à l'aide des méthodes de réduction, de substitution, de comparaison, de Cramer, matricielle et itérative. Ce commentaire complète celui présenté à l'objectif intermédiaire 1.4.6.

Soit le système:

$$4x + y = 23 \qquad (1)$$
$$2x + 3y = 19 \qquad (2)$$

a) <u>La méthode de réduction</u>

multiplier (2) par -2:

$$-4x - 6y = -38 \qquad (3)$$

additionner (1) et (3):

$$-5y = -15$$

$$y = 3 \qquad (4)$$

substituer (4) dans (1):

$$4x + 3 = 23$$

$$4x = 20$$

$$x = 5$$

la solution est: (5, 3).

b) <u>La méthode de substitution</u>

(1) devient:

$$y = 23 - 4x \qquad (3)$$

substituer (3) dans (2)

$$2x + 3(23 - 4x) = 19$$

$$2x + 69 - 12x = 19$$

$$-10x = -50$$

$$x = 5 \qquad (4)$$

substituer (4) dans (3):

$$y = 23 - 4 \times 5$$
$$y = 23 - 20$$
$$y = 3$$

la solution est: (5, 3).

c) <u>La méthode de comparaison</u>

(1) devient:

$$4x = 23 - y$$
$$x = \frac{23 - y}{4} \qquad (3)$$

(2) devient:

$$2x = 19 - 3y$$
$$x = \frac{19 - 3y}{2} \qquad (4)$$

(3) et (4) donnent:

$$\frac{23 - y}{4} = \frac{19 - 3y}{2}$$
$$46 - 2y = 76 - 12y$$
$$10y = 30$$
$$y = 3 \qquad (5)$$

substituer (5) dans (3):

$$x = \frac{23 - 3}{4}$$

$$x = \frac{20}{4}$$

$$x = 5$$

la solution est: (5, 3).

d) <u>La méthode de Cramer</u>

(1) et (2) donnent:

$$\begin{matrix} 4 & -1 & 23 \\ 2 & 3 & 19 \end{matrix} \qquad 4 \times 3 - 1 \times 2$$

$$\begin{matrix} 4 & 1 & -23 \\ 2 & 3 & 19 \end{matrix} \qquad 23 \times 3 - 1 \times 19$$

$$\begin{matrix} 4 & 1 & -23 \\ 2 & 3 & 19 \end{matrix} \qquad 4 \times 19 - 23 \times 2$$

et il est possible d'écrire

$$x = \frac{23 \times 3 - 1 \times 19}{4 \times 3 - 1 \times 2} = \frac{69 - 19}{12 - 2} = \frac{50}{10} = 5$$

$$x = \frac{4 \times 19 - 23 \times 2}{4 \times 3 - 1 \times 2} = \frac{76 - 46}{12 - 2} = \frac{30}{10} = 3$$

la solution est: (5, 3).

e) <u>La méthode matricielle</u>

(1) et (2) donnent:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 23 \\ 2 & 3 & 19 \end{bmatrix}$$

multiplier (1) par 3 et soustraire de (2):

$$\begin{bmatrix} -10 & 0 & -50 \\ 2 & 3 & 19 \end{bmatrix}$$

diviser (1) par -10:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 19 \end{bmatrix}$$

diviser (2) par 2 et soustraire de (1):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

multiplier (2) par -2/3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

d'où:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{car} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

la solution est: (5, 3).

La résolution de tout système d'équations infère la nécessité d'opérer sur les colonnes ou les rangées de données présentées généralement sous forme de tableaux, graphiques ou grilles, ces arrangements sont dénommés matrices. La méthode efficace de traiter de tels ensembles d'éléments en rangées, ou en colonnes s'appelle l'algèbre matriciel.

Pour parvenir à résoudre des problèmes à l'aide de matrices il convient d'être capable de représenter un graphique par une matrice et vice versa, de représenter une relation par une matrice et vice versa, ou de représenter une situation par une matrice et vice versa. Il convient également d'être capable d'associer les termes élémentaires sur les matrices à leur signification (matrice carrée, matrice de dimension $m \times n$). Il convient aussi d'être capable d'opérer sur les matrices en utilisant les transformations élémentaires:

- interchanger,
- multiplier une rangée par un réel non nul,
- additionner ou soustraire deux rangées.

Il importe également de savoir comment trouver le produit d'une matrice par un nombre réel ou d'une matrice par une matrice.

f) <u>La méthode itérative</u>

L'avènement de la calculatrice de poche permet de présenter à l'élève une autre méthode de résolution, celle qui procède par itération. Voici un exemple qui applique cette méthode.

(1) devient:

$$y = 23 - 4x \qquad (3)$$

(2) devient:

$$2x = 19 - 3y$$

$$x = \frac{19 - 3y}{2} \qquad (4)$$

et les procédures utilisées sont:

0 [STO]

23 [−] 4 [×] [RCL] [STO] et [(] 19 [−] 3 [×] [RCL] [)] [÷] 2 [STO]

Dans le tableau ci-dessous, il suffit de poser par hypothèse que x = 0 dans (3) et de démarrer le processus d'itération: (3) dans (4), (4) dans (3), (3) dans (4), (4) dans (3), etc.

Etapes	x		y
1	0,0000		
			23,0000
2	-25,0000		
			123,0000
3	-175,0000		
			723,0000
4	-1075,0000		
			4323,0000
5	-6475,0000		
			25 923,0000

Le tableau précédent montre clairement que les valeurs successives de x et de y ne tendent pas respectivement vers une "certaine valeur".

Pour solutionner ce problème il suffit d'isoler les variables "y" et "x" mais en se servant des équations (2) et (1) respectivement (contrairement à (1) et (2) dans l'exemple précédent). Alors:

(2) devient:

$$3y = 19 - 2x$$

$$y = \frac{19 - 2x}{3} \qquad (5)$$

(1) devient:

$$x = \frac{23 - y}{4} \qquad (6)$$

et les procédures utilisées sont:

0 [STO]

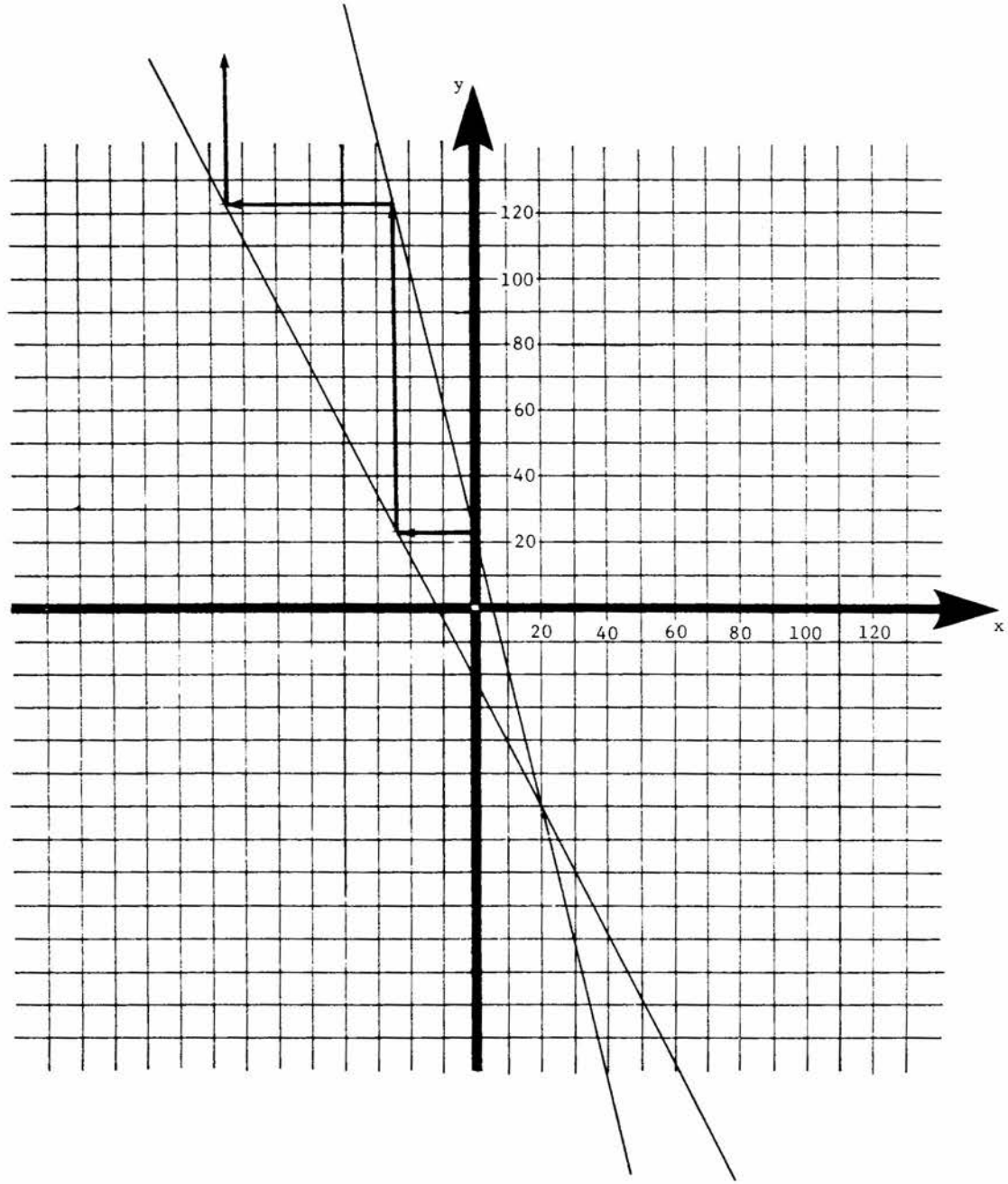
[(] 19 [−] 2 [×] [RCL] [)] [÷] 3 [STO] et [(] 23 [−] [RCL] [)] [÷] 4 [STO]

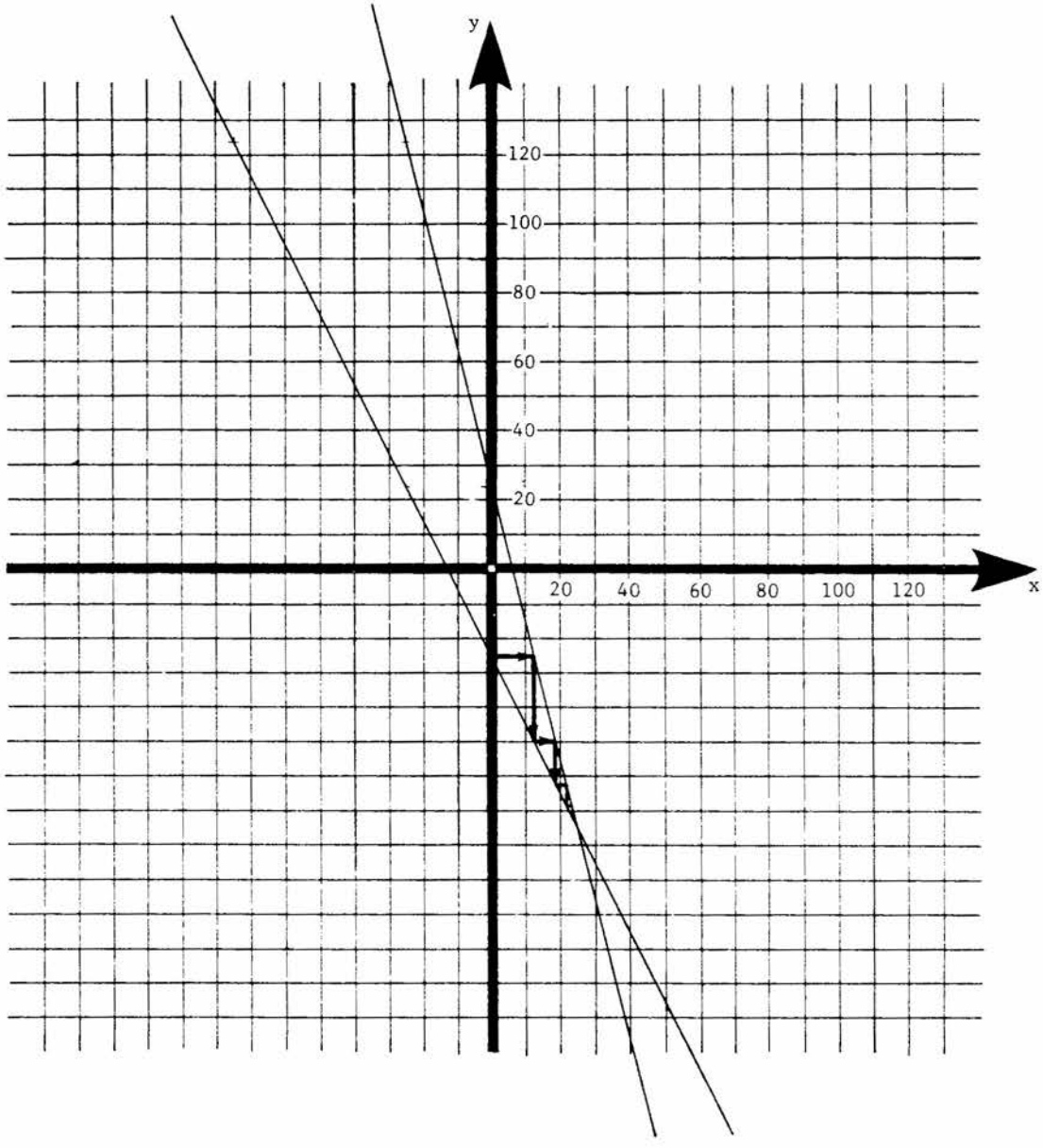
Dans le tableau suivant, il suffit de poser par hypothèse que x = 0 dans (5) et de démarrer le processus d'itération. On y voit clairement que x et y tendent respectivement vers 5 et 3.

Etapes	x		y
1	0,0000		
			6,3330
2	4,1667		
			5,5556
3	4,8611		
			3,0926
4	4,9769		
			3,0154
5	4,9961		
			3,0026

Partir de 0 ou d'une valeur approximative et exécuter plusieurs fois la suite de procédures est un procédé itératif. Dans l'exemple précédent, on vérifiera que le procédé est valable quelle que soit la valeur de départ. Par exemple, on essayera les valeurs 100, -150, 0,001, 15,85, etc.

Pour faire comprendre à l'élève le mécanisme du procédé itératif, on lui fait placer sur le graphique du système chacune des valeurs obtenues dans les deux tableaux précédents. Les flèches illustrent l'ordre dans lequel on a trouvé les valeurs.

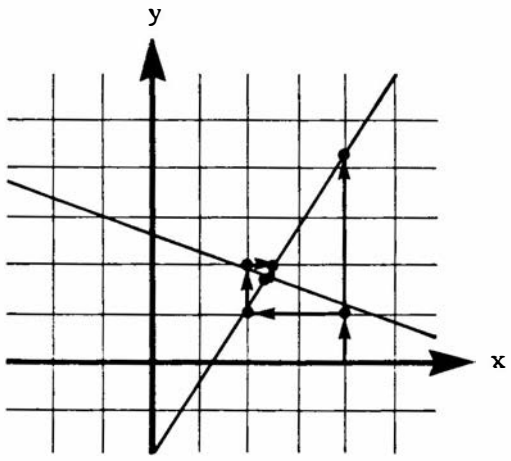

y
120
100
80
60
40
20
20
40
60
80
100
120
x


y
120
100
80
60
40
20
20
40
60
80
100
120
x

On obtient deux "escaliers", l'un qui s'éloigne de la solution, l'autre qui s'en rapproche, et ceci quelle que soit la valeur de départ choisie différente de 5. Lorsque le produit des taux de variation de chaque fonction est négatif on n'a plus un escalier mais une spirale qui s'enroule (se rapproche de la solution) ou qui se déroule (s'éloigne de la solution). Le principe reste le même que dans le cas des "escaliers". A titre d'exemple, au système

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 3x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

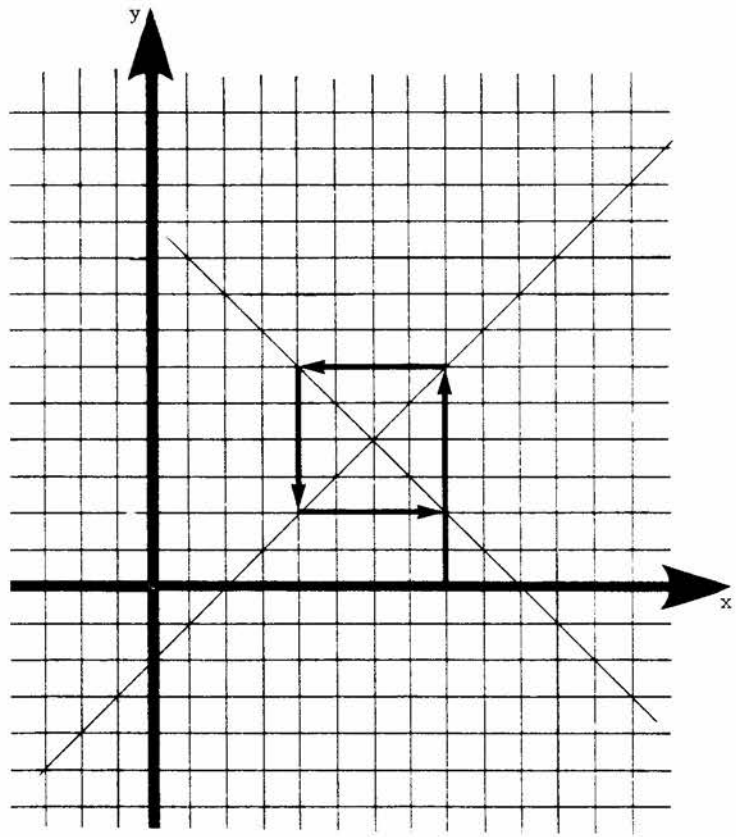
correspondra le graphique suivant.



Il serait avantageux d'étudier certains cas particuliers comme:

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - 2y &= 3 \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} x - 2y &= -8 \\ 3x - 6y &= -12 \end{aligned}$$

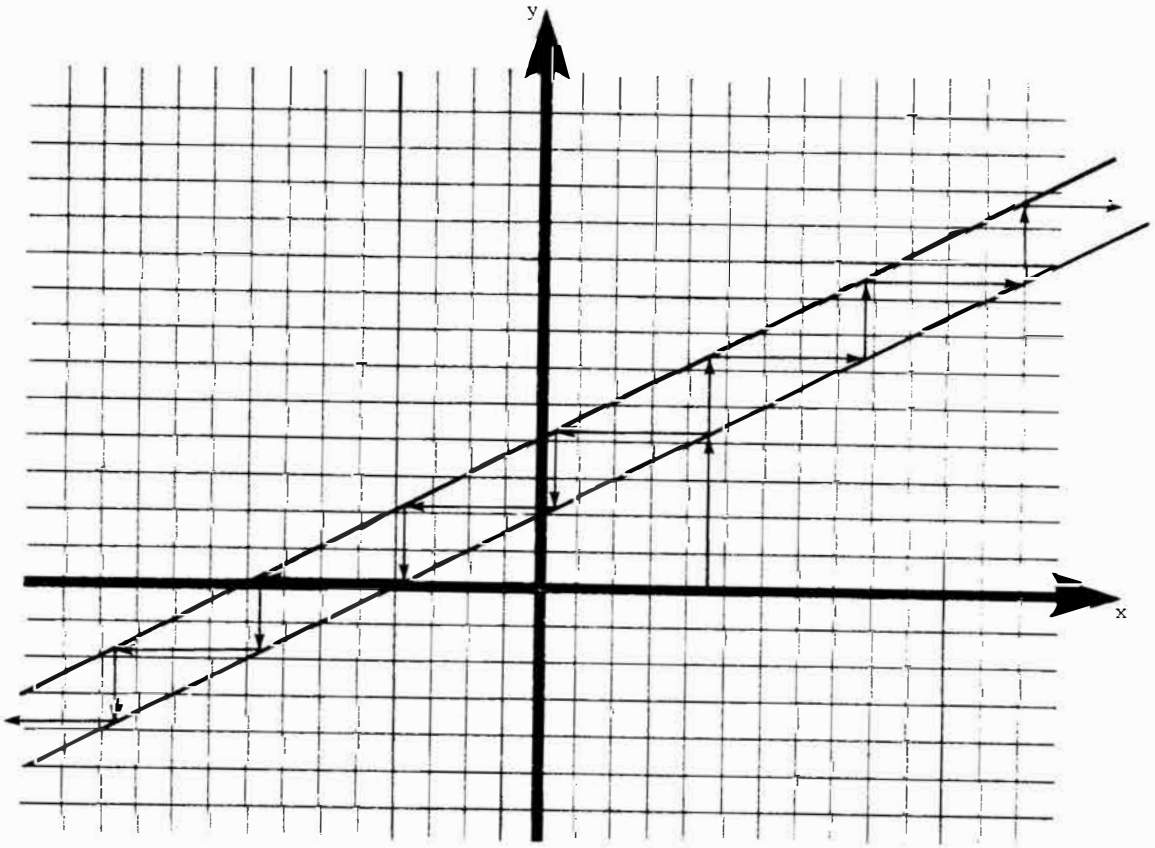
Dans le premier cas on tourne en rond puisqu'on revient toujours au point de départ.



Le produit des taux de variation est caractéristique. Pour trouver des procédures qui permettent d'atteindre la solution, il suffira d'utiliser un système équivalent comme celui-ci:

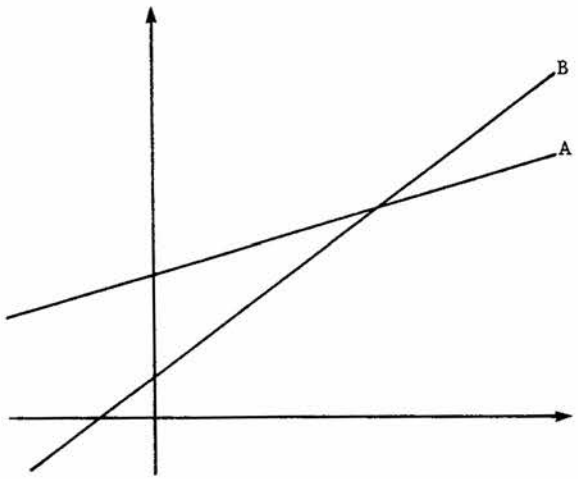
$$x + y = 5$$
$$3x - y = 8 \qquad \text{(somme des équations)}$$

Dans le deuxième cas, l'escalier est régulier, les marches sont toujours de la même hauteur.



Les taux de variation sont identiques.

Il serait bon de faire varier les taux de variation et de faire expérimenter l'élève à partir de différents systèmes. A partir du graphique d'un système, faire dégager les règles d'application des procédures pour converger à coup sûr vers la solution. Voici un exemple:



Si A et B sont les procédures qui permettent de trouver y à partir de x pour chaque fonction, on exécutera la suite A, B^{-1}, A, B^{-1}, ... pour se rapprocher de la solution. C'est le cas lorsque le produit des taux de variation est positif.

L'utilisation d'une méthode itérative peut apparaître pour certains peu efficace. Mais l'initiation à cette méthode voit son utilité dans sa simplicité et dans ses possibilités d'interprétation graphique. Ce sont là de bonnes valeurs pédagogiques. Cette méthode voit aussi son prolongement dans la résolution d'équations fort simples à amorcer mais pour lesquelles il n'existe pas de formules, par exemple $x = \cos x$. Comme le procédé exige de longs calculs, l'utilisation des outils électroniques est ici tout indiqué.

La résolution d'une opération peut se résoudre par itération. Par exemple $108 + x = (180 + x) \times 0{,}76$ peut être composée à la résolution du système

$$y = 108 + x$$
$$y = (108 + x) \times 0{,}76$$

si on exécute les procédures

[×] 0,76 [=] [+] 136,8 [=] suivi de [−] 108 [=]

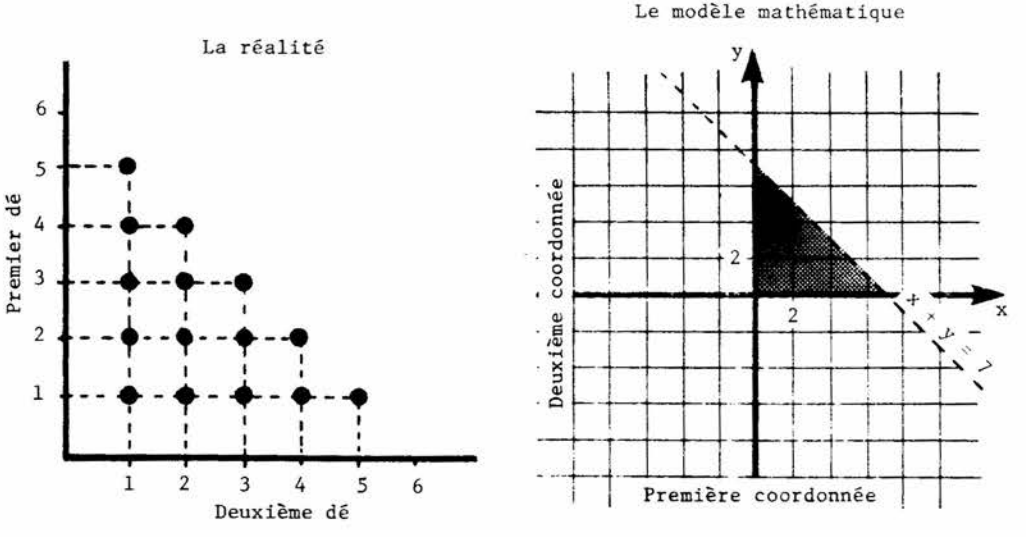
A partir d'une valeur quelconque, on remarque après quelques étapes que l'on se rapproche de 120. On aura constaté que la suite de procédure peut se simplifier.

[×] 0,76 [+] 28,8 [=]

E- Les inéquations

La représentation graphique est une technique très utile pour rechercher et déterminer les solutions associées à une ou plusieurs inéquations. Le fait de choisir des situations proches du vécu de l'élève entraîne une représentation graphique qui se situe souvent uniquement dans le premier quadrant et souvent même uniquement sur les points du "quadrillage" telles les situations: achats de billets de loterie, ou autres dénominations de billets, tirages de jetons, de dés ou simulations, productions de pièces, etc. Cependant ce choix contribue à faire réaliser la grande généralisation qu'est l'algèbre et à provoquer une discussion sur les limites de l'interprétation des représentations graphiques.

Exemple: Déterminer les situations où la somme de deux dés est inférieure à 7.

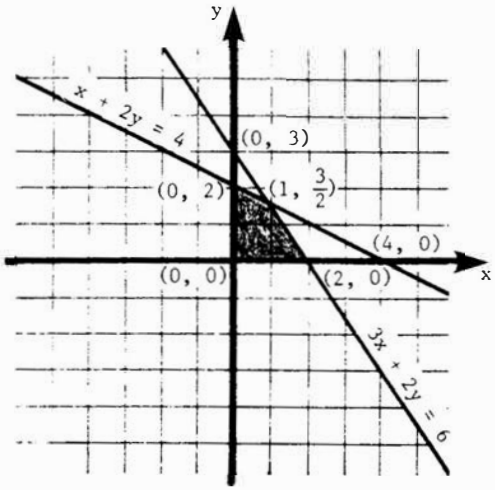


La programmation linéaire constitue un autre sujet propice au développement d'habiletés relatives à la mathématisation et à la résolution. Dans le domaine des affaires et de l'industrie, celle-ci facilite la prise de décision, la recherche du rendement maximum, celle du coût minimum, etc.

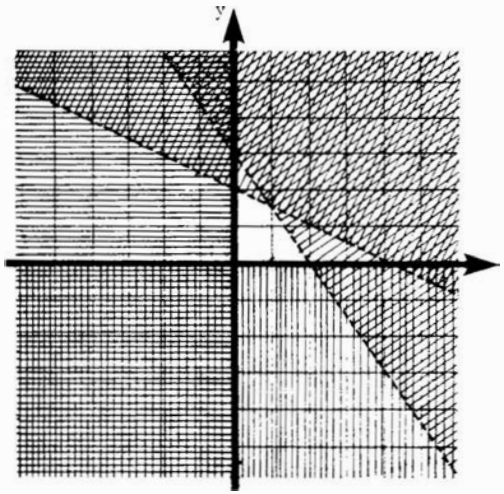
En programmation linéaire, il existe deux méthodes pour représenter un polygone de contraintes. Soit le modèle suivant:

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$3x + 2y \leq 0$$
$$x + 2y \leq 4$$

a) les hachures représentant le polygone de contraintes:



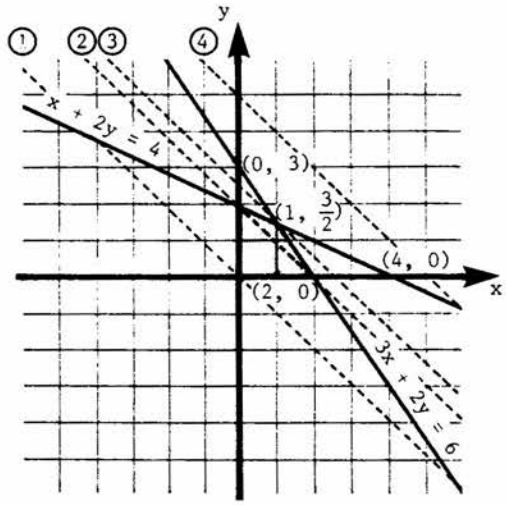
b) les hachures représentant les régions complémentaires:



Quand on évalue une expression du type $z = ax + by + c$ pour les valeurs des coordonnées des points d'une région polygonale convexe, on constate que la valeur maximale se situe au moins à l'un de ses sommets, il en est de même pour sa valeur minimale.

La droite correspondant à $z = ax + by + c$ est élément de la famille de droites de direction $-\frac{a}{b}$.

Ainsi dans l'illustration ci-contre $z = x + y$ a comme valeur maximum 2,5 au point $(1, \frac{3}{2})$ du polygone convexe. $z = x + y = 5$ est une valeur qui n'appartient pas à la région polygonale convexe considérée.



① $z = x + y = 0$
② $z = x + y = 2$
③ $z = x + y = 2,5$
④ $z = x + y = 5$

La recherche des points d'optimisation mise sur le théorème. "L'évaluation de l'expression $z = ax + by + c$ par les valeurs des coordonnées des points d'une région polygonale convexe est une valeur maximale au moins à l'un des sommets". On peut en déduire que si deux sommets maximisent

l'expression, alors tous les points du segment reliant ces deux sommets constituent des maxima.

Voici une situation: "Un sac renferme 6 jetons rouges et 4 jetons jaunes".

Question 1: Quelle est la composition possible d'un tirage d'au plus 6 jetons?

Soient: r le nombre de jetons rouges;

j le nombre de jetons jaunes.

Le modèle:

$r \geq 0$

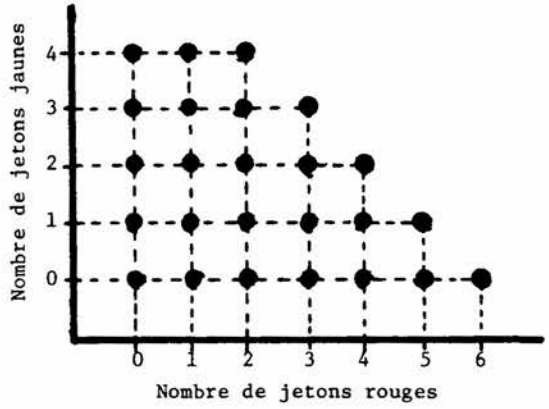
$j \geq 0$

$r \leq 6$

$j \leq 4$

$r + j \leq 6$

sera représenté par le graphique ci-contre.



Question 2: Quelle est la composition possible d'un tirage de 6 jetons?

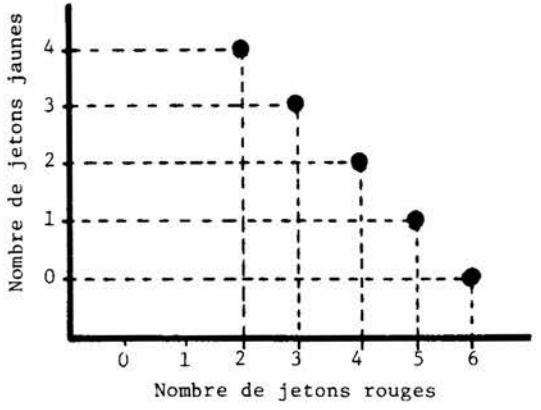
Soient: r le nombre de jetons rouges;

j le nombre de jetons jaunes.

Le modèle:

$$r \geq 0$$
$$j \geq 0$$
$$r \leq 6$$
$$j \leq 4$$
$$r + j = 6$$

est représenté par le graphique ci-contre.



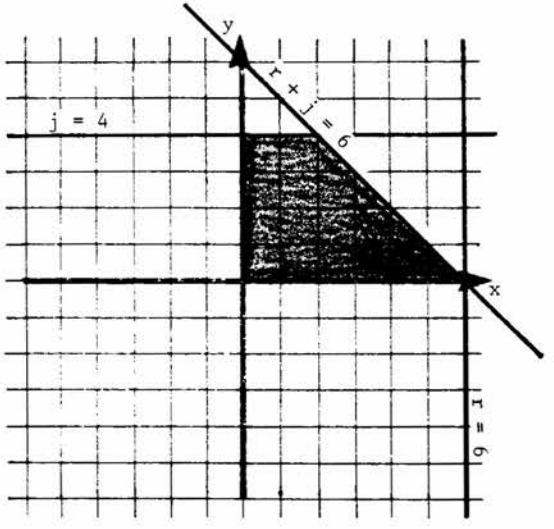
Il est possible de constater que le modèle mathématique est beaucoup plus général et qu'il recouvre plus que la réalité décrite dans l'énoncé du problème; le graphique ci-dessous représente le modèle général associé à la situation.

Le polygone de contraintes ci-contre est associé aux conditions suivantes:

$$r \geq 0$$
$$j \geq 0$$
$$r \leq 6$$
$$j \leq 4$$
$$r + j \leq 6$$

et la fonction à optimiser est:

$$z = r + j$$



La situation optimale se trouve en substituant les coordonnées du point sommet dans la fonction à optimiser:

Les sommets du polygone	Les valeurs de z
(0, 0)	0
(0, 4)	4
(2, 4)	6
(6, 0)	6

comme deux sommets (2, 4) et (6, 0) permettent une valeur maximale de z, on en conclut que le segment reliant ces deux sommets fournit également des valeurs optimales pour la fonction à optimiser et il faut conclure que (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) et (6, 0) sont autant de cas possibles pour le tirage de jetons (rouges, jaunes).

Une autre situation met en évidence l'utilité d'un support graphique dans la recherche de la solution à un problème posé.

> Sur une ferme, il y a 200 volailles. On y dénombre des dindes, des coqs et des poules. Si le propriétaire désire au moins 50 dindes et 10 coqs mais pas plus de 100 dindes et 20 coqs tout en ne dépassant pas 100 des deux et si son bénéfice net est de 3,50 $ pour une dinde, 3,00 $ pour un coq et 2,00 $ pour une poule, quel est le nombre de chaque volaille qui permettra de maximiser le bénéfice net du propriétaire?

Soient: x le nombre de dindes;

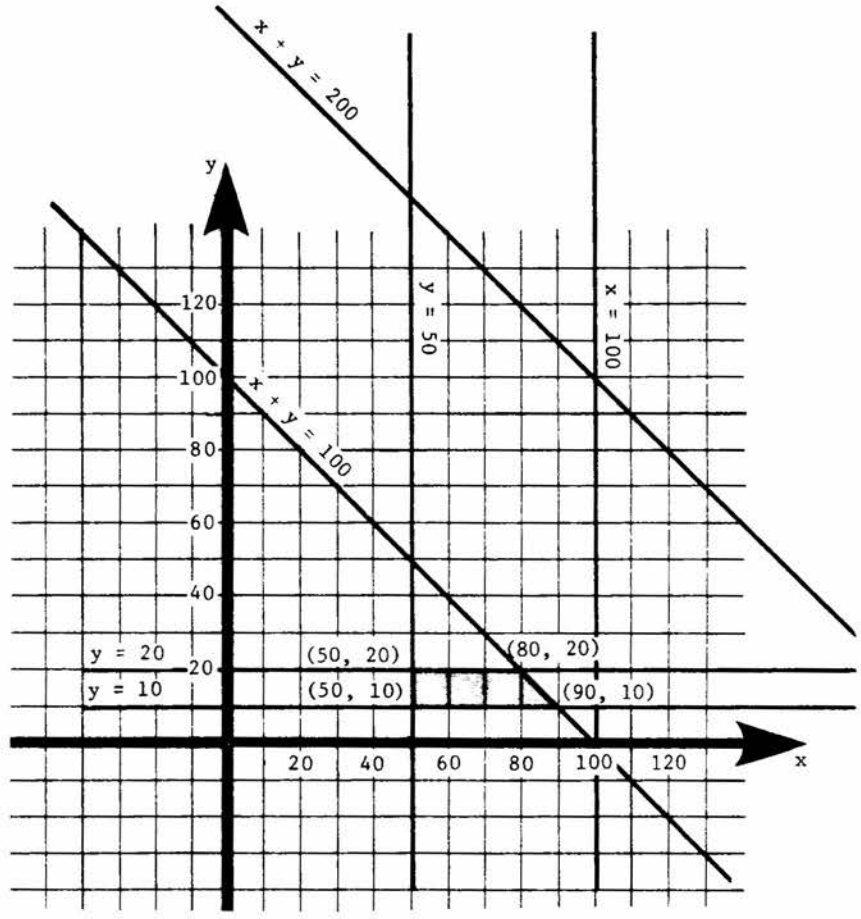
y le nombre de coqs;

$200 - (x + y)$ le nombre de poules.

a) Le modèle mathématique associé à ce problème sera donc:

$x \geq 50$	"au moins 50 dindes";
$y \geq 10$	"au moins 10 coqs";
$200 - (x + y) \geq 100$	on ne peut avoir un nombre négatif de poules;
$x \leq 100$	"pas plus de 100 dindes";
$y \leq 20$	"pas plus de 20 coqs";
$x + y \leq 100$	"tout en ne dépassant pas 100 des deux".

b) La représentation graphique du modèle est:



et la région ombrée représente le polygone de contraintes déterminé par l'intersection des six demi-plans associés aux inéquations du modèle;

il est également possible de déterminer avec précision les coordonnées des points sommets du polygone de contraintes:

$x = 50$ et $y = 10$ donnent $(50, 10)$

$x = 50$ et $y = 20$ donnent $(50, 20)$

$x + y = 100$ et $y = 10$ donnent $(90, 10)$

$x + y = 100$ et $y = 20$ donnent $(80, 20)$

c) La fonction à optimiser est:

$$z = 3{,}5x + 3y + 2[200 - (x + y)]$$
$$z = 3{,}5x + 3y + 400 - 2x - 2y$$
$$z = 1{,}5x + y + 400$$

d) La recherche de rendement optimum se fait en substituant les coordonnées des points sommets dans la fonction à optimiser.

Les sommets du polygone	Les valeurs de z
(50, 10)	485
(10, 20)	495
(90, 10)	545
(80, 20)	540

e) L'interprétation du résultat:

la fonction z est maximale au sommet (90, 10); il y a alors 90 dindes, 10 coqs et 200 - (90 + 10) = 200 - 100 = 100 poules.

Voici un autre exemple:

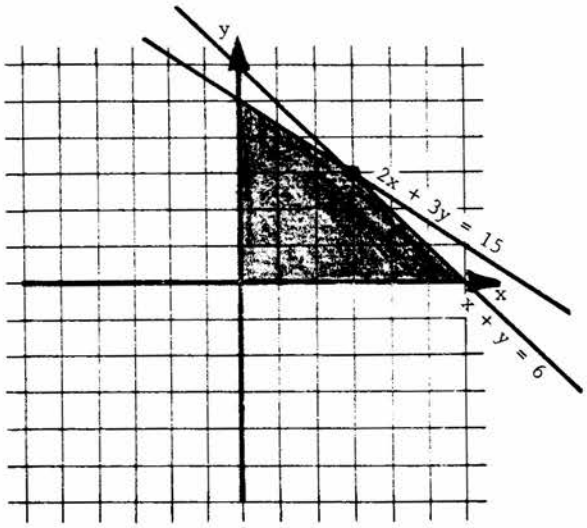
Une compagnie utilise en temps partagé les ordinateurs A et B pour résoudre des problèmes sur l'environnement: pollution de l'air et pollution de l'eau. Elle n'a accès à l'ordinateur A que six minutes par heure et à l'ordinateur B que quinze minutes par heure. Un problème de pollution de l'eau nécessite l'utilisation de l'ordinateur A pendant une minute et de l'ordinateur B pendant deux minutes. Alors qu'un problème sur la pollution de l'air nécessite l'utilisation de l'ordinateur A pendant une minute et de l'ordinateur B pendant trois minutes. La compagnie fait un bénéfice net de 250,00 $ pour une recherche sur la pollution de l'eau et de 400,00 $ pour un travail de pollution de l'air. Quel est le partage horaire le plus rémunérateur?

Soient: x le nombre de problèmes sur la pollution de l'eau;
y le nombre de problèmes sur la pollution de l'air;

L'analyse de cette situation permet de relever les contraintes suivantes:

$x \geq 0$	Un nombre négatif de problèmes est impossible.
$y \geq 0$	Un nombre négatif de problèmes est impossible.
$1x - 1y \leq 6$	"Un problème de pollution de l'eau nécessite l'utilisation de l'ordinateur A pendant une minute et un problème de pollution de l'air nécessite également une minute d'utilisation de l'ordinateur A".
$2x - 3y \leq 15$	"Un problème de pollution de l'eau nécessite l'utilisation de l'ordinateur B pendant deux minutes et un problème de pollution de l'air nécessite trois minutes d'utilisation de l'ordinateur B".

Le graphique associé à ce modèle est:



La fonction à optimiser est:

$$z = 250x + 400y$$

La recherche du rendement optimal est obtenue en substituant les coordonnées des points sommets du polygone de contraintes dans la fonction à optimiser.

Les sommets du polygone	Les valeurs de z
(0, 0)	0
(1, 5)	2000
(3, 3)	1950
(6, 0)	2500

Il faut alors conclure que la solution la plus rentable consisterait à n'accepter l'exécution que des seuls problèmes traitant de la pollution de l'air.

3

ÉVALUATION PÉDAGOGIQUE

Cette section du guide pédagogique contient l'énoncé de critères et de modalités, applicables à l'évaluation des apprentissages, susceptibles de favoriser un jugement de valeur sur le degré d'atteinte des objectifs du programme.

Il est important de se rappeler à cet égard la responsabilité de l'enseignant: "c'est d'abord dans la classe que l'évaluation s'effectue et c'est l'enseignant qui en est le premier responsable".[1] L'intégration de l'évaluation pédagogique à la démarche dynamique d'apprentissage de l'élève doit être une préoccupation primordiale de l'enseignant.

> "L'évaluation de l'apprentissage doit porter sur les objectifs de formation en vue desquels l'élève est appelé à travailler quotidiennement. Faire porter l'évaluation sur les objectifs de formation, c'est l'accorder avec les processus mentaux auxquels l'enseignement fait appel. C'est une question de qualité de l'éducation et de justice pour l'élève. Ce serait manquer de cohérence, par exemple, que de faire surtout appel à la compréhension et à l'analyse pendant l'enseignement et d'évaluer ses élèves ensuite par rapport à la simple mémorisation."[2]

L'évaluation pédagogique ne doit pas se faire sans motifs.

> "Quelles que soient les raisons d'évaluer l'apprentissage de l'élève, on doit toujours avoir conscience du motif qui sous-tend toute opération d'évaluation qu'on entreprend.

---

1. Gouvernement du Québec, Ministère de l'Education, L'Ecole québécoise, énoncé de politique et plan d'action, 1979, page 96.

2. M.E.Q., Politique générale d'évaluation pédagogique, secteur du préscolaire, du primaire et du secondaire, septembre 1981, no 16-7500, page 10.

> Est-ce pour mesurer le progrès individuel d'un élève vers l'objectif recherché? Est-ce pour avoir une idée générale du progrès de l'ensemble des élèves de l'école ou d'un groupe donné dans la poursuite du programme? Est-ce pour procéder à la formation de sous-groupes de travail dans une classe et favoriser ainsi un meilleur respect du rythme d'apprentissage pour chaque groupe concerné? Est-ce pour informer les parents sur les progrès de leurs enfants? Est-ce pour juger des stratégies d'enseignement utilisées?"[1]

L'enseignant étant le principal responsable de l'évaluation pédagogique de l'élève, c'est donc à lui que revient la responsabilité de fixer le moment pour l'application d'un instrument de mesure.

> "En évaluation formative, l'enseignant est habituellement le plus apte à fixer le moment de relever des indices. L'enseignant sait quand l'activité d'apprentissage a eu lieu et il peut déterminer le moment propice pour vérifier si l'apprentissage, lui aussi, a véritablement eu lieu chez l'élève.
>
> L'enseignant tout comme le directeur d'école peuvent également fixer le moment où ils doivent poser certains gestes d'évaluation sommative. Si, par exemple, ils désirent vérifier chez les élèves le degré de maîtrise réelle d'un ensemble de concepts ou d'habiletés, ils pourront procéder à une évaluation-synthèse dont ils détermineront eux-mêmes les moments tout en tenant compte du plan d'évaluation."[2]

---

1. M.E.Q., Politique générale d'évaluation pédagogique, secteur du préscolaire, du primaire et du secondaire, septembre 1981, no 16-7500, page 10.

2. Ibid, page 10.

Dans le processus dynamique de l'apprentissage, l'évaluation joue un rôle primordial et contribue à:

- "fournir des données sur la qualité du rendement scolaire des élèves et de leur développement général ;
- aider à prendre connaissance de la qualité de l'apprentissage réalisé par les élèves;
- aider au diagnostic de problèmes particuliers ou collectifs de rendement scolaire ou de développement général des élèves;
- conduire à des décisions permettant d'orienter l'activité pédagogique".[1]

Les travaux, questionnaires de contrôles, tests, examens, etc. sont fréquemment utilisés comme instruments de mesure par les enseignants. Certains d'entre eux dépassent ce stade en élaborant des grilles d'observation qui servent d'outil à l'évaluation. Dans cette foulée, ce guide pédagogique propose des grilles qui se veulent des instruments susceptibles de favoriser une évaluation formative supportée par une interprétation critériée (grille du type A), tout en ne négligeant pas l'évaluation sommative où intervient également l'interprétation normative (grille du type B).

Que les grilles fournies dans ce document soient employées ou non, le maître ne devrait généralement pas utiliser les résultats ayant servi à une évaluation formative comme éléments à la base d'une interprétation normative. En d'autres mots, ces résultats sont des indices permettant un enseignement correctif et ils ne doivent habituellement pas figurer sur le bulletin officiel de l'élève.

---

1. S.G.M.E., La mesure critériée et la mesure normative, 1976.

L'évaluation sommative consignée au bulletin de l'élève, vise à contrôler la maîtrise d'un ensemble d'objectifs d'apprentissage. A l'évaluation formative, elle ajoute le temps (la rétention) et l'accumulation des connaissances (qui peut dans certains cas augmenter la maîtrise). Cette évaluation comporte un seuil minimal (la note de passage). Pour toutes ces raisons, elle semble posséder les caractéristiques qui conduisent à l'interprétation critériée et peut occasionnellement servir à une telle interprétation.

Le tableau tétrachorique suivant situe le cadre du processus dynamique de l'évaluation des apprentissages et de son interprétation dans une démarche pédagogique explicitée aux paragraphes précédents.

		INTERPRETATION	
		NORMATIVE	CRITERIEE
EVALUATION	FORMATIVE	Utilisation occasionnelle	Usage à privilégier
	SOMMATIVE	Usage à privilégier	Utilisation occasionnelle

Les grilles de la catégorie A permettent une évaluation formative des apprentissages. La mesure peut s'effectuer à l'aide des tests diagnostiques, ceux-ci assurant la mesure du degré de maîtrise de chaque objectif terminal. Ces tests vont favoriser une interprétation critériée des acquis de chaque élève et faciliter un enseignement correctif adéquat. Ces tests ne servent qu'au diagnostic et ne doivent pas être utilisés à des fins de promotion. Une mesure ponctuelle est effectuée sur chaque objectif général. Le résultat de cette mesure exprimé sur 100 est alors pondéré par le facteur n. Cette pondération est nécessaire afin que les notes reflètent l'importance relative accordée à chacun des objectifs généraux. Il est possible de déterminer la valeur du n en s'inspirant des pourcentages du tableau présenté à la section 5.2 du programme, étalés sur 100%. La cote ainsi obtenue est reportée à la case appropriée de la grille B.

Comme le rendement d'un élève n'est pas toujours "directement proportionnel" à ses résultats, l'enseignant est fortement encouragé à favoriser une co-évaluation où le maître et l'élève évaluent conjointement le "rendement général" de l'élève à partir de critères acceptés par tous: effort, constance, qualité et quantité de travail, participation, etc. en exprimant le résultat à l'aide d'une échelle telle:

5 excellent,
4 très bon,
3 bon,
2 passable,
1 médiocre,
0 nul.

La moyenne de ces co-évaluations est reportée à la case correspondante de la grille B. La grille A étant complétée, l'enseignant peut s'en servir comme un des éléments importants qui lui permet d'effectuer une évaluation critériée des apprentissages de chaque élève.

La grille de la catégorie B permet de colliger les cotes correspondant aux "co-évaluations" et aux "examens" calculées à chacune des grilles A. La moyenne des cotes de la colonne "co-évaluation" et la sommation des cotes pondérées de la colonne "examen" permettent d'obtenir un portrait général du rendement de l'élève. La mesure obtenue à l'aide de l'examen final dont le contenu doit nécessairement toucher à tous les objectifs généraux d'un programme permet de vérifier si l'élève a été capable de faire une synthèse des concepts étudiés. Cet examen final doit être préparé et administré par l'organisme scolaire (une commission scolaire, une commission scolaire régionale ou le ministère de l'Education) responsable de l'application de ce programme. La demi-somme des examens et de l'examen final fournit un résultat exprimé sur 100 qui permet une évaluation générale du rendement de l'élève. Les deux cotes qui apparaissent au bas de cette grille peuvent servir d'éléments importants dans l'évaluation sommative face aux acquis académiques de l'élève et dans la décision concernant la promotion de ce dernier.

Les pages qui suivent regroupent les grilles des catégories A et B. Celles-ci couvrent l'ensemble du programme du second cycle du secondaire.

Prénom :	Nom :
Programme de : second cycle, sec. III	

OBJECTIF GÉNÉRAL	N° 1	FAVORISER chez l'élève l'application des connaissances arithmétiques ou algébriques.

OBJECTIFS TERMINAUX		Co - évaluation	Test diagnostique	Examen
1.1	RESOUDRE des problèmes de la vie courante impliquant des nombres réels.			
1.2	RESOUDRE des problèmes de la vie courante se traduisant par une expression algébrique du premier degré à une variable réelle.			
1.3	RESOUDRE des problèmes de la vie courante se traduisant par une fonction constante ou du premier degré.			
1.4	RESOUDRE des problèmes issus de situations se traduisant par un système d'équations du premier degré à deux variables réelles.			
1.5	RESOUDRE des problèmes issus de situations se traduisant par un système d'inéquations du premier degré à deux variables réelles.			

A

n = 0,40

$\frac{\quad}{100} \times n$

Moyenne

Co - évaluation :
5 Excellent
4 Très bon
3 Bon
2 Passable
1 Médiocre
0 Nul

Remarques : _____

Prénom :	Nom :
Programme de : second cycle, sec. III	

	OBJECTIFS GÉNÉRAUX	Co - évaluation	Examen	Examen final
1	FAVORISER chez l'élève l'application des connaissances arithmétiques ou algébriques.			
2	FAVORISER chez l'élève l'analyse de situations géométriques.			
3	INITIER l'élève à l'analyse de données statistiques ou probabilistes.			

B

Co - évaluation :
5 Excellent
4 Très bon
3 Bon
2 Passable
1 Médiocre
0 Nul

Promotion : _____

Remarques : _____

_____

Moyenne

100
100
200
100

Prénom :	Nom :
Programme de : second cycle, sec. IV	

OBJECTIF GÉNÉRAL	N° 1	FAVORISER chez l'élève l'application des connaissances arithmétiques ou algébriques.

	OBJECTIFS TERMINAUX	Co - évaluation	Test diagnostique	Examen
1.1	RESOUDRE des problèmes de la vie courante impliquant des nombres réels.			
1.2	RESOUDRE des problèmes de la vie courante se traduisant par une expression algébrique du premier degré à une variable réelle.			
1.3	RESOUDRE des problèmes de la vie courante se traduisant par une fonction constante ou du premier degré.			
1.4	RESOUDRE des problèmes issus de situations se traduisant par un système d'équations du premier degré à deux variables réelles.			
1.5	RESOUDRE des problèmes issus de situations se traduisant par un système d'inéquations du premier degré à deux variables réelles.			

A

n = 0,40

$\frac{\quad}{100} \times n$

Moyenne

Co - évaluation :
5 Excellent
4 Très bon
3 Bon
2 Passable
1 Médiocre
0 Nul

Remarques : _____

Prénom :	Nom :
Programme de : second cycle, sec. IV	

	OBJECTIFS GÉNÉRAUX	Co - évaluation	Examen	Examen final
1	FAVORISER chez l'élève l'application des connaissances arithmétiques ou algébriques.			
2	FAVORISER chez l'élève l'analyse de situations géométriques.			
3	INITIER l'élève à l'analyse de données statistiques ou probabilistes.			

B

Co - évaluation :
5 Excellent
4 Très bon
3 Bon
2 Passable
1 Médiocre
0 Nul

Promotion : _____

Remarques : _____

_____

Moyenne

100

100

200

100

Prénom :	Nom :
Programme de : second cycle, sec. V	

OBJECTIF GÉNÉRAL	N° 1	FAVORISER chez l'élève l'application des connaissances arithmétiques ou algébriques.

OBJECTIFS TERMINAUX		Co - évaluation	Test diagnostique	Examen
1.1	RESOUDRE des problèmes de la vie courante impliquant des nombres réels.			
1.2	RESOUDRE des problèmes de la vie courante se traduisant par une expression algébrique du premier degré à une variable réelle.			
1.3	RESOUDRE des problèmes de la vie courante se traduisant par une fonction constante ou du premier degré.			
1.4	RESOUDRE des problèmes issus de situations se traduisant par un système d'équations du premier degré à deux variables réelles.			
1.5	RESOUDRE des problèmes issus de situations se traduisant par un système d'inéquations du premier degré à deux variables réelles.			

A

$n = 0,46$

$\frac{\quad}{100} \times n$

Moyenne

Co - évaluation :
5 Excellent
4 Très bon
3 Bon
2 Passable
1 Médiocre
0 Nul

Remarques : _____

Prénom :	Nom :
Programme de : second cycle, sec. V	

	OBJECTIFS GÉNÉRAUX	Co - évaluation	Examen	Examen final
1	FAVORISER chez l'élève l'application des connaissances arithmétiques ou algébriques.			
2	FAVORISER chez l'élève l'analyse de situations géométriques.			
3	INITIER l'élève à l'analyse de données statistiques ou probabilistes.			

B

Co - évaluation :
5 Excellent
4 Très bon
3 Bon
2 Passable
1 Médiocre
0 Nul

Promotion : _____

Remarques : _____

_____

Moyenne

100

100

200

100

4

MATERIEL DIDACTIQUE

MATERIEL DIDACTIQUE

L'enseignement de la mathématique, pour être valable, doit se fonder sur la découverte et l'utilisation par l'élève de certains concepts de base: classification, nombres, numération, mesure, opérations ou formes géométriques. Or, dans cette démarche, la manipulation revêt une importance telle qu'on ne saurait s'en passer. En effet, c'est à partir de situations quotidiennes, de tâches motivantes et d'expériences diverses, grâce à des jeux, à des codes ou à des représentations, que l'enfant construit ses propres concepts et peut opérer ses propres abstractions.

Pour favoriser une telle démarche, maître et élèves doivent recourir à un matériel didactique abondant, varié et facile d'accès. A cause des contraintes multiples imposées par le coût du matériel, le nombre d'usagers et les problèmes d'entreposage, une organisation pédagogique et physique de l'utilisation de ce matériel devient une nécessité.

Voici une liste non exhaustive de matériel didactique qui ne comprend ni les documents écrits (manuels, cahiers d'exercices, cahiers de réponses, guide du maître) ni les documents audio-visuels.

MATERIEL POUR UNE CLASSE

QUANTITE	DESCRIPTION
Mesure d'angle et de longueur	
1	Compas pour tableau, bois, longueur 420 mm, pivot double, caoutchouc-acier.
1	Courbe flexible, barre de plomb, monture de vinyle, longueur 600 mm.
1	Equerre pour tableau, plastique ou bois, 30° - 60°, droite-gauche, hauteur 500 mm, graduée, poignée.
1	Equerre pour tableau, plastique ou bois, 45°, droite-gauche, longueur 400 mm, graduée, poignée.
1	Rapporteur pour tableau, plastique ou bois, 180°, droite-gauche, longueur de la base 500 mm.
1	Règle pour tableau, plastique ou bois, largeur 64 mm, longueur 1000 mm, graduée, poignée.
1	Té pour tableau, plastique ou bois, longueur 900 mm, poignée.
3	Clinomètre, type révolver, plastique avec plomb.
3	Compas à calibrer, plastique ou bois, longueur 300 mm, mesures intérieures et extérieures.
3	Micromètre (0-25) mm ou 0,01 mm, acier inoxydable.
3	Pied à coulisse, longueur 900 mm à 1000 mm, gradué, mesures intérieures et extérieures.

QUANTITE	DESCRIPTION
Mesure d'angle et de longueur (suite)	
3	Roue à mesurer, plastique, circonférence 1000 mm, graduée, déclic sonore, manche.
3	Ruban à mesurer, fibre de verre, longueur 20 000 mm, graduée en millimètres.
Volume et surface	
1	Centimètres cubes (1000), masse 1 gramme, plastique, couleurs assorties, emboitables.
1	Litre, plastique clair, cube de 100 mm d'arête, gradué en millimètres.
35	Grille transparente, plastique, 200 mm x 200 mm, mesure de surface.
1	Mètre cube squelettique, démontable, 3 tiges peintes au décimètre.
1	Récipient plastique, 1000 ml, gradué 50 ml, bec verseur et anse.
1	Solides évidés, plastique, hauteur 150 mm, trou de remplissage, jeu de 14.
Géométrie et algèbre	
1	Angle au centre et angle inscrit, matériel aimanté.
17	Géoplan, planche, 300 mm x 300 mm, chevilles, bandes élastiques, couleur.

QUANTITE	DESCRIPTION
Géométrie et algèbre (suite)	
1	Parallèles coupées par une sécante, mtériel aimanté.
1	Théorème de Pythagore, matériel aimanté.
Matériel complémentaire	
1	Boussole, type Brunton "Cadet", miroir de visée, graduation 0-360, droite-gauche.
35	Calculatrices scientifiques à logique algébrique.
1	Droite numérique, tableau magnétique, largeur 200 mm, longueur 1500 mm, disques.
1	Initiation, probabilité, statistique, (trousse).
-	Niveau inclinable, angles horizontaux, grossissement 18X.
1	Planimètre polaire compensateur, plastique, loupe.
10	Polyformes, assemblage de cartons rigides, bandes élastiques.
10	Volumes à construire, pailles plastiques, liens, noeuds de jonctions.
35	Miroirs, (Mira ou autres).
1	Blocs multibases (1 ensemble).
2	Réseaux logiques et blocs logiques.

QUANTITE	DESCRIPTION
Matériel complémentaire (suite)	
2	Trimath et quadrimath.
1	Tableau à coordonnées polaires et à coordonnées rectangulaires (recto-verso).
	Jeux mathématiques divers.
8	Micro-ordinateurs.

MATERIEL FOURNI PAR L'ECOLE

QUANTITE	DESCRIPTION
	Colle de résine, blanche, bidon de 5 kg.
	Jeu de cartons, couleurs variées.
	Papier millimétrique quadrillé.
35 par classe-atelier	Ciseaux tout usage, acier, longueur 200 mm, (droite, gauche).

MATERIEL ACHETE PAR L'ELEVE

QUANTITE	DESCRIPTION
	Compas à crayon, laiton, longueur 150 mm, vis de blocage ou pince.
	Equerre de dessinateur, plastique clair, hauteur 150 mm, 30° - 60°, droite-gauche.
	Equerre de dessinateur, plastique clair, hauteur 150 mm, 45°, droite-gauche.
	Rapporteur d'angles, plastique, 150 mm, demi-circonférence, double échelle, mire.
	Règle à mesurer, plastique ou bois, 300 mm, graduée en millimètres.
	Calculatrice scientifique à logique algébrique.

5

BIBLIOGRAPHIE

Voici une bibliographie non exhaustive qui peut être source de suggestions d'activités.

A noter que, règle générale, n'apparaissent pas dans cette section les livres agréés par le ministère de l'Education ainsi que les matériels (fiches) qui existent dans les commissions scolaires.

OBJECTIF GENERAL 1 FAVORISER chez l'élève l'application des connaissances arithmétiques ou algébriques.

A.M.Q. Fascicules: Les ensembles 1, Les entiers naturels 2, Les systèmes de numération des entiers naturels 3, Les algorithmes pour les opérations sur les entiers naturels 4, Les systèmes de numération des nombres rationnels 5, Les nombres et leurs facteurs 6. Traduits de la collection "SETS" du NCTM, 1964.

APSI. Le langage BASIC. APSI systèmes informatiques inc., Duvernay (Laval), 3e version, 1978.

Aubé, Michel, Côté, Benoît et autres. Programmation en LOGO, guide de travail. Télé-université, (PERMAMA), PMM-3016, 1976, 207 pages.

Aubé, Michel, Côté, Benoît et autres. Projets en programmation LOGO. Télé-université, (PERMAMA), PMM-3017, 1976, 95 pages.

Banwell, C.S. et autres. Points de départ. Adapté de l'anglais par Dubail F. et autres, éditions Cédic, HMH, 1974.

Bellehumeur, M., Valard, J.-P. Eléments d'informatique et programmation fortran. Lidec, 1974.

Bergamini, David. Les mathématiques. Collections Time-Life, Life le monde des sciences, 1969, 200 pages.

Bergeron, A., Bordier, J., Warisse, M. Utilisation de la calculatrice pour l'enseignement des mathématiques au secondaire, recueil de problèmes. PERMAMA, (PMM-5026), Télé-université, 1981.

Bergeron, A., Bordier, J., Warisse, M. Utilisation de la calculatrice pour l'enseignement des mathématiques au secondaire, textes de référence. PERMAMA, (PMM-5026), Télé-université, 1981.

Berloquin, Pierre. 100 jeux alphabétiques. Le livre de poche, 3519, 1973.

Berloquin, P. 100 jeux et casse-tête. Le livre de poche, 4165, 1975.

Berloquin, P. 100 jeux logiques. Le livre de poche, 3568, 1973.

Berloquin, P. 100 jeux numériques. Le livre de poche, 3669, 1973.

Berloquin, P. Testez votre intelligence. Le livre de poche, 3915, 1974.

Bordier, J. et autres. Entiers relatifs et nombres rationnels. PERMAMA, (PMM-3030), Télé-université, 1977.

Bouchard et autres. Modèles mathématiques et réalité. PERMAMA, (PMM-4004), Télé-université, 1978.

Bouchard et autres. Modèles mathématiques et réalité, niveaux d'aide. PERMAMA, (PMM-4004), Télé-université, 1978.

Boucher, Claude. Les nombres, leur histoire. Collection Les mathématiques aujourd'hui, Lidec, 1965.

Bouvier, A. et autres. Dictionnaire des mathématiques. Presses universitaires de France, Paris, 1979, 832 pages.

Boyer, M. et autres. Nombres naturels. PERMAMA, (PMM-3029), Télé-université, 1977.

Boyer, M. et Warisse, M. Fonctions et calculs numériques à l'aide de la calculatrice. PERMAMA, (PMM-3032 et PMM-3042), Télé-université, 1979.

Byron S., Gottfried. Programmation BASIC, théorie et applications. Série Schaum, Edition Bernard Legrand, McGraw Hill, 1979, 234 pages.

Collette, J.-P. Histoire des mathématiques. Editions du Renouveau pédagogique. 1973, 228 pages.

Côté, Benoît. Raisonnement mathématique et ordinateur. Télé-université, (PERMAMA), PMM-4009, 1977.

Cromley, Thomas H. La connaissance des ordinateurs. Bell Canada, 1970, 150 pages.

Curtis, C.W. Linear Algebra, An Introduction Approach. Allyn and Bacon, Inc., 1968.

Dalois, Maurice. APL: une approche pratique. Ministère de l'Education, 1980, 291 pages.

Dienes, Z.P. et Jeeves, M.A. Pensée et structure. O.C.D.L.

Dienes, Z.P. La mathématique vivante 1, Nombres naturels, entiers, rationnels. Editions HMH, Montréal.

Dienes, Z.P. Fractions. Education nouvelle.

Dienes, Z.P. Nombres naturels, entiers rationnels , dans La mathématique vivante 1. Editions Hurtubise, Montréal.

Dufort, J.-G. et autres. Résolution de problèmes, guide d'activités. PERMAMA, (PMM-4002), Télé-université, 1977.

Dufort, J.-G. et autres. Résolution de problèmes, introduction à l'heuristique. PERMAMA, (PMM-4002), Télé-université, 1977.

Engel, A. A Short Course in Probability. CEMREL, Missouri, 1970.

Fehr, H. Unified Mathematics (SSMCIS). Columbia University, N.Y.

Feldman, Jérôme. Les langages de programmation, dans Pour la science. No 28, pages 80 à 91, février 1980.

Filion, P. Les entiers relatifs. S.O.E.M.

Fletcher, T. L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui. O.C.D.L. (Entreprises culturelles).

Fletcher, T. L'algèbre linéaire et ses applications. Cédic.

Fleury, M. et autres. Programmation linéaire 1. PERMAMA, (PMM-3020), Télé-université, 1977.

Fleury, M. et autres. Programmation linéaire 1, textes supplémentaires. PERMAMA, (PMM-3020), Télé-université, 1977.

Fleury, M. et autres. Programmation linéaire 2. PERMAMA, (PMM-3021), Télé-université, 1976.

Fomin, S.V. Number Systems. Traduit du russe par Teller Joan W. et Bransn Thomas P., 1974, University of Chicago Press.

Galion. Mathématique 4e, 5e et 6e. O.C.D.L., Hatier.

Glaymann, M. Initiation aux méthodes itératives et utilisation de calculateurs avec des enfants. A.P.M.E.P., no 308, avril 1977.

Gravel, H., Patenaude, P., Labelle, M. La mathématique en atelier. Fascicules 1 à 14, Entreprises culturelles.

Grignon, J. N-9999. A.P.A.M.E., mai 1979.

Guérin, Vaschalde, Warusfel. Le calculateur de poche et ses jeux. Paris, Hachette, 1976, 221 pages.

Hagelbarger, David, Fingerman, Saul. Cardiac. Laboratoires Bell, 1970, 52 pages.

Harris, J. et autres. The School Mathematics Project (SMP). Cambridge University Press, books A, B, C, D, E, F, G, H, 1969.

Harris, J. et autres. Activités mathématiques. Traduction et adaptation de SMP (School Mathematics Project), livres A et B, par Bourget B., Filion P. et Gaulin C., Ed. HRW, 1976.

Institut national de recherche et de documentation pédagogiques. Langage symbolique d'enseignement LSE, manuel d'utilisation. Paris, janvier 1975.

Jacobs, H. R. Mathematics A Human Endeavor. Freeman, 1970.

Johnson, D. et autres. Activities in Mathematics. First Course and Second Course, Scott.

Kaufman, A. Des points et des flèches, la théorie des graphes. Science-poche, Dunod.

Locke, P. "Residue Designs", dans The Mathematics Teacher. NCTM, March, 1972.

Loyd, S. Mathematical Puzzles. Dover, 1959.

Loyd, S. More Mathematical Puzzles. Dover, 1960.

McFadden, M. Modern Trigonometry. A Program for Self-Instruction, McGraw-Hill.

N.C.T.M. Historical Topics for the Mathematics Classroom. NCTM, 1969.

Nichols, E., Garland, E.H. Modern Trigonometry. HRW, 1968.

Ogilvy, C.S. et Anderson, J.T. Excursions dans la théorie des nombres. Science-poche, Dunod.

Oystein, O. Les graphes et leurs applications. Collection Sigma, Dunod.

The Open University. Relations. M10019.

Picard, A. "Some Observations on Graphing in Modular Systems", dans The Mathematics Teacher. NCTM, Mai, 1971.

Sawyer, W.W. Voir et comprendre les mathématiques. Editions Hurtubise HMH, 1972.

Schloseberg, S., Prochwan, J. 50 jeux avec votre calculatrice de poche. Editions Radio, Paris.

Smith, D.E. History of Mathematics. Vol. II.

Spitzbarth, Laurel M. Basic Cobol Programming. Addison-Wesley, 1970.

Stein, S.K. Mathematics the Man-made Universe. Freeman, 1969.

Vannier, E. et Chauvreau, P. Comment jouer avec votre calculatrice de poche. Fayard, Paris, 1976, 119 pages.

Vannier, E. Nouveaux jeux pour votre calculatrice de poche. Les Editions Fayard.

Warusfel, André. Dictionnaire raisonné de mathématiques. Editions du Seuil, Paris, 1966, 514 pages.

Warusfel, A. Les nombres et leurs mystères. Le Rayon de la Science, Editions du Seuil, 1961.

Zaks, Rodnay. Introduction aux micro-ordinateurs individuels et professionnels. Sybex, 1978, 268 pages.

8384-1048

Gouvernement du Québec
**Ministère
de l'Éducation**