Gouvernement du Québec
Ministère de l'Éducation
Direction générale
du développement pédagogique

16 — 2300 — 03

GUIDE PÉDAGOGIQUE

• Primaire

MATHÉMATIQUE

Fascicule C

Les nombres naturels

Direction des programmes
Service du primaire

Mai 1982

U.Q.A.M.
LABORATOIRES DE
MATHÉMATIQUES ET
D'INFORMATIQUE

MATHÉMATIQUE

FASCICULE C

LES NOMBRES NATURELS

ISBN 2—550—04773—7

Dépôt légal — deuxième trimestre 1982
Bibliothèque nationale du Québec.

PRÉSENTATION

L'importance de l'enseignement des nombres naturels dans un programme de mathématique au cours primaire n'est pas à démontrer.

Dans ce fascicule du guide pédagogique: le fascicule "C", on s'est donné comme tâche de souligner certaines difficultés rencontrées dans l'apprentissage de la mathématique, de provoquer une réflexion des enseignants sur ces mêmes difficultés et de suggérer certaines approches susceptibles de contribuer à faciliter ces apprentissages.

On y montre en particulier:

- les relations qui peuvent exister entre différents éléments du contenu mathématique inscrits au programme;
- la façon dont on peut utiliser certaines notions ensemblistes dans l'apprentissage du nombre, de même que dans celui des quatre opérations;
- l'importance d'associer dans un premier temps l'apprentissage de concepts à des activités de manipulation;
- la nécessité d'utiliser des démarches pédagogiques qui favorisent la **compréhension** des concepts;
- le rôle que peut être appelé à jouer le calcul mental dans l'apprentissage de la mathématique.

Ce guide n'est évidemment pas parfait et n'a pas la prétention de l'être. Mais tel quel il peut sans doute contribuer à susciter chez les enseignants une conscience plus nette des difficultés rencontrées dans l'enseignement des mathématiques au cours primaire et à provoquer ainsi une réflexion saine capable d'entraîner des modifications d'attitudes qui soient génératrices de progrès.

PLAN DU FASCICULE

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

0.1 La mathématique dans l'enseignement primaire

Avant même d'entrer à l'école, déjà l'enfant a eu ses premiers contacts avec le monde de la mathématique.

La mathématique, en effet, n'a pas pour objet exclusif l'étude du nombre et de l'espace. Toute démarche de l'esprit dans laquelle l'enfant est amené à opérer des classifications, à mettre des éléments en ordre et à organiser des structures est une démarche mathématique. Dans ce sens, il faut bien comprendre qu'un modèle mathématique est une pure invention de l'esprit et que, par conséquent, chacun doit découvrir et réinventer cette mathématique pour lui-même.

Considérée sous cet angle, la mathématique ne manque pas d'être intéressante et attirante à cause des expériences nombreuses et variées que l'enfant sera amené à faire pour abstraire de la réalité des concepts et des relations qu'on aurait autrement vainement tenté de faire apprendre.

C'est ici que la découverte de **"régularités"** prend une dimension des plus importantes à cause même de l'individualisation de ce type d'apprentissage. Il est de plus en plus difficile, avec pareil contexte, de parler de tel ou tel âge pour apprendre telle ou telle notion ou de hiérarchiser dans l'absolu l'apprentissage de ces mêmes notions en termes d'acquisitions préalables.

Il n'est pas question ici de faire le procès des mathématiques traditionnelles pour le bénéfice des mathématiques dites modernes.

Si d'une part il faut rejeter les simples imitations routinières d'un exercice modèle proposé par le maître, d'autre part il faut convenir que dans l'ensemble, les contenus mathématiques à l'école primaire ont très peu évolué dans leur substances. C'est surtout l'attitude pédagogique du maître qui a changé ou qui doit changer.

Pour ce faire, et pour enseigner la mathématique avec une efficacité accrue, il est indispensable que le maître puisse se mettre à la place de l'élève et vive lui-même l'apprentissage qu'il doit ensuite lui proposer. Il doit se mettre à l'école de la découverte et de la créativité. C'est ainsi qu'il comprendra l'importance pour l'élève de construire sa propre mathématique en vue de l'apprentissage de notions et d'habiletés qui sont sensiblement les mêmes d'une génération à l'autre.

0.2 La mathématique aux niveaux préscolaire et primaire

Dans la section 1 du fascicule H du Guide pédagogique en mathématique au préscolaire, on souligne les objectifs communs au préscolaire et au primaire, tout en y exprimant le désir de diminuer l'écart pouvant exister entre les deux et en insistant sur la nécessité de mieux articuler les activités du préscolaire avec celles du primaire. Les enseignants auraient donc intérêt à relire les commentaires faits dans ce fascicule H.

0.3 Les nombres naturels

L'apprentissage des nombres naturels par l'enfant comporte un grand nombre d'éléments plus ou moins complexes dont la conceptualisation ne s'inscrit pas facilement dans le contexte d'une structuration linéaire trop rigoureuse. L'ordinalité, la cardinalité, le concept de nombre, les diverses façons de représenter ces nombres dans les systèmes de numération, les relations qui existent entre le nombre et la mesure, l'extension que l'on fait de l'ensemble des nombres naturels vers l'ensemble des nombres entiers relatifs et celui des nombres rationnels, tous ces aspects et bien d'autres font que l'étude des nombres naturels demande qu'on y consacre beaucoup de temps et d'énergie.

CHAPITRE 1

Les aspects cardinal et ordinal des nombres naturels

1.1 Cardinalité et ordinalité dans la psychogénèse du nombre

Si l'on s'arrête à l'importance du nombre dans notre contexte sociologique, on pourait s'imaginer facilement qu'on a recueilli un grand nombre de données sur la façon dont le concept de nombre prend forme dans la tête de l'enfant. Mais il n'en est rien. Le manque d'information à ce sujet est surprenant. On ne sait réellement pas comment se forme la notion de nombre chez l'enfant.

Les recherches dans ce contexte ont donné lieu à deux principales écoles de pensée. En premier lieu, on retrouve les logiciens qui mettent l'accent sur la CARDINALITÉ en passant par les correspondances biunivoques et les classes de quantification. En second lieu, il y a les formalistes qui s'alignent davantage sur l'ORDINALITÉ en passant par la logique des relations pour en dégager une certaine relation d'ordre.

Face à ces deux théories, le pédagogue peut demeurer perplexe. Cependant, si l'on s'arrête le moindrement à observer le comportement des jeunes enfants, on s'aperçoit qu'ils en arrivent assez vite à déterminer le nombre d'éléments qu'il y a dans un petit ensemble (deux ou trois éléments) en établissant au moins implicitement des correspondances biunivoques entre les éléments des ensembles d'une même classe d'équivalence.

Cependant, le problème se présente bien différemment lorsqu'il s'agit d'ensembles plus grands. C'est en **comptant,** que l'enfant détermine le nombre d'éléments dans un tel ensemble et cet ensemble n'a pas besoin d'être bien grand pour susciter pareil comportement.

D'autre part, les enfants apprennent très tôt à réciter les nombres jusqu'à cinq ou dix. Ils en arrivent même à établir des correspondances biunivoques entre ces mots et les éléments d'un ensemble donné, sans trop d'erreurs. Toutefois, il ne faudrait pas conclure pour autant qu'ils ont acquis la notion de nombre.

Il n'est que de se rappeler les expériences de Piaget sur la difficulté qu'ont les enfants d'acquérir la notion de conservation des quantités discontinues, pour mesurer l'ampleur du problème (voir figure 1.1).

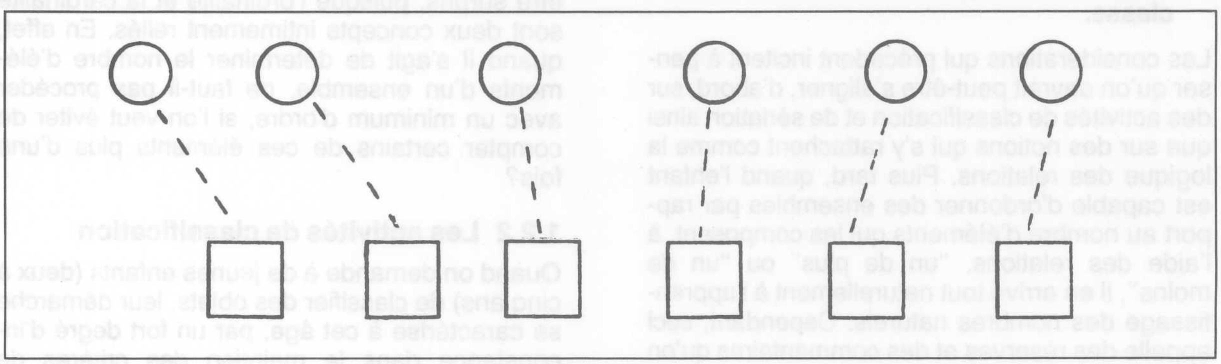


FIGURE 1.1

Dans ces différentes expériences, on s'aperçoit que l'enfant ne dissocie pas facilement la notion de nombre de la notion d'étendue[1]. On tentera donc d'amener l'enfant à faire de nombreux exercices de sériation en se rappelant que, dans la comparaison de deux ensembles pour déterminer s'il y a ou non correspondance biunivoque, on est à la frontière même des activités mathématiques d'ordre logique et d'ordre numérique.

Évidemment, avant d'ordonner des ensembles, il conviendrait de faire des exercices de **classification** pour grouper dans un même ensemble des éléments possédant une caractéristique commune.

On pourrait donc conclure qu'idéalement, il serait préférable, pour les enfants, de vivre un grand

[1] Voir la section 1.3 (Nombre et mesure) p. 6.

nombre d'expériences de cette nature avant d'apprendre à compter. Malheureusement, ce n'est pas si simple. **Compter** fait tellement partie du monde de l'enfant que celui-ci apprend à le faire presque en même temps qu'il apprend à parler. C'est un fait contre lequel on ne peut rien.

Constamment, les jeunes enfants utilisent, par imitation, des mots et des expressions qu'ils entendent autour d'eux et dont ils ne saisiront le sens que beaucoup plus tard. Y a-t-il lieu de s'en faire? Le seul danger possible, c'est que, dans le passage au langage écrit, on néglige, en faveur d'un "pseudo-comptage", l'étude d'autres notions fondamentales et complémentaires.

Compter n'est pas si mauvais dans l'apprentissage du nombre. Dans un contexte convenable, la formation du concept de nombre peut même s'en trouver favorisée de deux façons:

a) quand on compte les objets plusieurs fois et de différentes façons, on peut en arriver à la perception intuitive d'une certaine invariance dans le nombre d'éléments qui constitue cet ensemble d'objets;
b) le fait de compter les éléments de deux ensembles constitue une façon d'établir une correspondance biunivoque entre ces deux ensembles. Si l'on pousse la comparaison à un troisième ensemble, on en arrive même à percevoir la transitivité de cette relation de correspondance et à se rendre compte que l'invariance constatée en a) en est une **de classe.**

Les considérations qui précèdent incitent à penser qu'on devrait peut-être s'aligner, d'abord, sur des activités de classification et de sériation ainsi que sur des notions qui s'y rattachent comme la logique des relations. Plus tard, quand l'enfant est capable d'ordonner des ensembles par rapport au nombre d'éléments qui les composent, à l'aide des relations, "un de plus" ou "un de moins", il en arrive tout naturellement à l'apprentissage des nombres naturels. Cependant, ceci appelle des réserves et des commentaires qu'on va tenter d'expliciter dans les paragraphes qui suivent.

1.2 Sériation et classification

Dans la section précédente sur l'ordinalité et la cardinalité, on a parlé de relation d'ordre et de relation d'équivalence, de sériation et de classification. De plus, dans le fascicule H sur l'éveil de la mathématique à la maternelle, la question a été assez largement traitée.

Il existe dans le développement de l'enfant, une période prélogique qui évolue en même temps qu'une période prénumérique. La compréhension du nombre ne peut se faire sans l'acquisition d'une certaine habileté dans les activités de classification et de sériation. En fait, la formation du concept de nombre repose en grande partie sur l'exercice de ces deux types d'activités. Le cheminement parallèle de l'enfant dans l'évolution du concept de nombre et dans l'acquisition des habiletés de classification et de sériation est essentiel et le maître doit en tenir compte dans l'établissement de ses stratégies d'apprentissage.

1.2.1 Les activités de sériation

Les activités de sériation constituent une démarche fondamentale en mathématique et l'on devrait fournir aux enfants de nombreux exercices de ce genre. Cette démarche est fondamentale parce qu'elle prépare l'enfant à percevoir la relation d'ordre dans les nombres. Pour ce faire, il faudra veiller également à ce que ces exercices de sériation se fassent dans les deux sens, (du plus petit au plus grand et du plus grand au plus petit). Cette réversibilité est très utile, voire nécessaire à la compréhension du nombre. Toutefois, on notera que l'intelligence opérationnelle d'un ordre à établir ne se rencontre pas beaucoup chez l'enfant, avant l'âge de six ou sept ans.

La notion de nombre ordinal devient opérationnelle chez l'enfant à peu près au même moment que celle du nombre cardinal. Il ne faudrait pas en être surpris, puisque l'ordinalité et la cardinalité sont deux concepts intimement reliés. En effet, quand il s'agit de déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble, ne faut-il pas procéder avec un minimum d'ordre, si l'on veut éviter de compter certains de ces éléments plus d'une fois?

1.2.2 Les activités de classification

Quand on demande à de jeunes enfants (deux à cinq ans) de classifier des objets, leur démarche se caractérise à cet âge, par un fort degré d'inconstance dans le maintien des critères de classification arrêtés au départ: couleur, forme, grandeur ou grosseur. Ainsi, un enfant peut bien commencer par mettre ensemble un "carré" bleu et un "carré" rouge, mais changeant subitement le critère de la forme pour celui de la couleur, il ajoute à l'ensemble ainsi formé un "triangle" rouge. Ensuite, il peut tout aussi bien décider que le "carré" placé sous le "triangle" forme une maison surmontée d'un toit, de sorte que, tout au long de son activité, il se montre tout à fait impuissant à conserver le même critère de classification.

Plus tard, de cinq à sept ou huit ans, l'enfant se dégageant peu à peu de sa trop forte dépendance à l'égard de ses perceptions sensorielles en arrive à pouvoir établir des relations d'équivalence basées sur la forme, la grandeur, la couleur, etc. Il le fait cependant par la méthode des essais et erreurs tout en parvenant à élaborer son modèle. L'utilisation de boîtes pour placer des objets ayant même caractéristique peut alors l'aider à mieux accomplir son travail.

Enfin, de six à neuf ans, la pensée de l'enfant devient plus souple. Celui-ci ne se borne plus, par exemple, au seul critère de la couleur. Il va même jusqu'à planifier sa démarche avant de se mettre au travail: il ne procède plus par essais et erreurs.

La classification se fonde sur la logique et sur les relations logiques. Se livrer à des exercices de classification, c'est, pour l'enfant, l'une des activités physiques les plus importantes, les plus susceptibles de favoriser l'apprentissage des concepts fondamentaux. C'est pourquoi les activités de classification devraient précéder et accompagner l'étude du nombre. D'ailleurs, l'enfant n'en tire pas avantage uniquement en mathématique, mais également en français, en sciences humaines, en sciences de la nature, etc.

On n'a pas besoin d'un matériel sophistiqué pour faire réaliser de tels exercices. On peut fort bien se contenter d'objets à la portée de la main comme des boutons que l'on peut classer selon la couleur, la forme, la grandeur, le nombre de trous, etc. Les enfants devraient pouvoir utiliser un matériel assez diversifié et recueilli à partir des objets qu'on retrouve en classe. On aurait ici profit à se référer au fascicule sur les concepts unificateurs.

1.2.3 Le nombre

On connaît sans doute les expériences décrites par Piaget au sujet de la correspondance entre des vases et des fleurs. De quatre à cinq ans, les enfants sont généralement incapables d'établir des correspondances biunivoques entre les éléments de deux ensembles comme celui des vases et celui des fleurs. De cinq à six ans, les enfants réussissent à établir de telles correspondances. Cependant, lorsque les ensembles ne sont pas placés de façon à faire coïncider leurs extrémités, les enfants concluent à la non-équivalence de ces ensembles, même si ces derniers comptent le même nombre d'éléments. Ils n'arrivent pas à percevoir **l'invariance** du nombre.

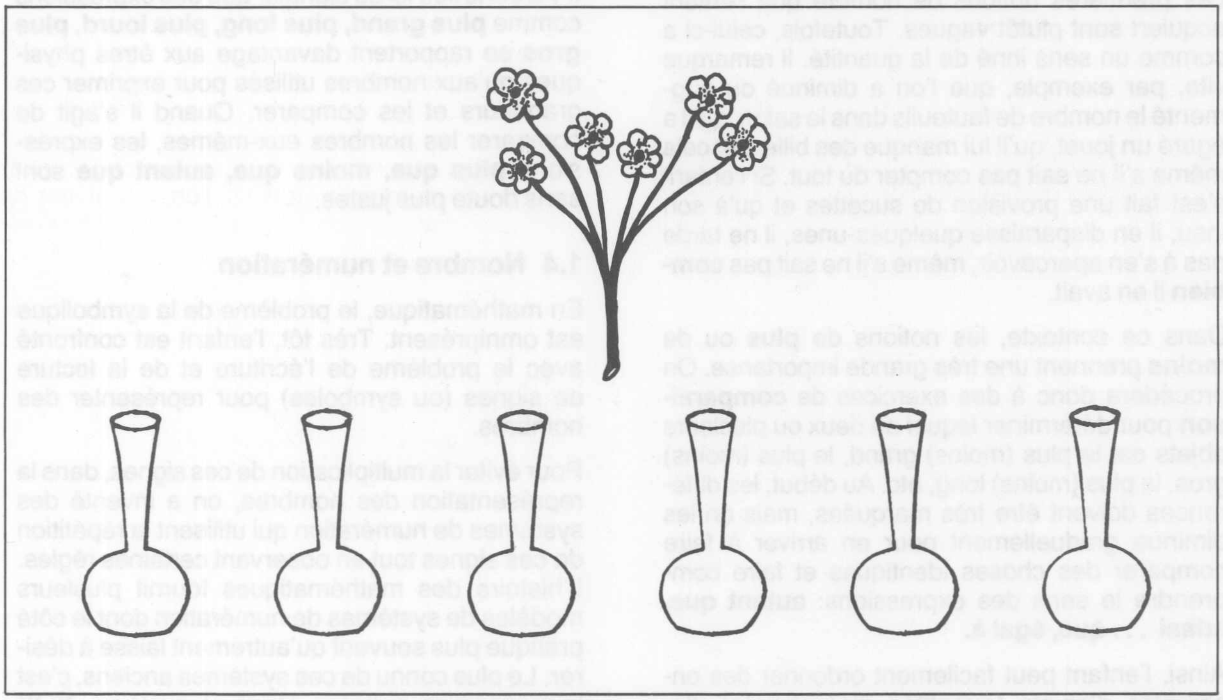


FIGURE 1.2.3

Ce n'est que vers six ou sept ans que les enfants peuvent résoudre cette situation, car ils ne sont plus victimes de leurs perceptions sensorielles. Ils s'aperçoivent que, quels que soient les changements apportés à la disposition des objets, leur nombre ne varie pas. Ils en sont alors au stade du concret opérationnel; ils sont capables de pensée logique et ont une première appréhension du concept du nombre.

On peut admettre que le concept logique de la conservation est une condition préalable à toute activité logique, à tout raisonnement. La notion de nombre n'échappe pas à cette contrainte. Le nombre, bien sûr, relève davantage de la logique que du domaine des perceptions sensorielles. L'élaboration du concept de nombre ne se produit pas beaucoup avant celle du concept de classes d'équivalence, c'est-à-dire à l'âge où l'enfant, se débrarrassant de son égocentrisme, manifeste un souci de vérification ou de justification logique. On ne devrait pas aborder l'addition trop vite car, en dépit des apparences, les associations de type additif n'apparaissent pas si tôt qu'on le croit.

1.3 Nombre et mesure

Existe-t-il une certaine relation entre les notions de nombre et de mesure?

Les premières notions de nombre que l'enfant acquiert sont plutôt vagues. Toutefois, celui-ci a comme un sens inné de la quantité. Il remarque vite, par exemple, que l'on a diminué ou augmenté le nombre de fauteuils dans le salon, qu'il a égaré un jouet, qu'il lui manque des billes, et cela même s'il ne sait pas compter du tout. Si l'enfant s'est fait une provision de sucettes et qu'à son insu, il en disparaisse quelques-unes, il ne tarde pas à s'en apercevoir, même s'il ne sait pas **combien** il en avait.

Dans ce contexte, les notions de **plus** ou de **moins** prennent une très grande importance. On procédera donc à des exercices de **comparaison** pour déterminer lequel de deux ou plusieurs objets est le plus (moins) grand, le plus (moins) gros, le plus (moins) long, etc. Au début, les différences doivent être très marquées, mais on les diminue graduellement pour en arriver à faire comparer des choses identiques et faire comprendre le sens des expressions: **autant que, aussi . . . que, égal à.**

Ainsi, l'enfant peut facilement ordonner des ensembles d'objets (quantités discontinues) d'après leur nombre d'éléments ou simplement disposer certains objets (quantités continues) par ordre de grandeur.

Mais pour l'apprentissage du nombre, c'est à la comparaison de quantités discontinues qu'il semble qu'on doive s'arrêter. Ces exercices de comparaison doivent se prolonger tant et aussi longtemps que les enfants n'ont pas acquis une conception du nombre qui leur permet, par exemple, d'en situer un entre deux autres. Ainsi, placé en face d'un groupe de sept objets, l'enfant doit être sûr qu'il y en a sept et non six ou huit. Les expressions **un de plus, un de moins** seront fréquemment utilisées pour aider l'enfant à mieux situer les nombres les uns par rapport aux autres et partant, à assurer une meilleure compréhension d'un nombre, en particulier, et du nombre, en général.

Quand on a un ensemble fini d'objets distincts (billes, cubes, etc.), il est toujours possible de déterminer le nombre d'éléments de cet ensemble, c'est-à-dire qu'on peut toujours établir une correspondance biunivoque entre un ensemble d'objets et un nombre. Il n'en va pas de même des **quantités continues:** longueur, masse, aire, température, volume, temps, etc. Quand on mesure de telles grandeurs, on n'est jamais certain de trouver un objet qui permet d'assurer cette correspondance.

Il y a donc lieu ici de signaler que des expressions comme **plus grand, plus long, plus lourd, plus gros** se rapportent davantage aux êtres physiques qu'aux nombres utilisés pour exprimer ces grandeurs et les comparer. Quand il s'agit de comparer les nombres eux-mêmes, les expressions **plus que, moins que, autant que** sont sans doute plus justes.

1.4 Nombre et numération

En mathématique, le problème de la symbolique est omniprésent. Très tôt, l'enfant est confronté avec le problème de l'écriture et de la lecture de signes (ou symboles) pour représenter des nombres.

Pour éviter la multiplication de ces signes, dans la représentation des nombres, on a inventé des systèmes de numération qui utilisent la répétition de ces signes tout en observant certaines règles. L'histoire des mathématiques fournit plusieurs modèles de systèmes de numération dont le côté pratique plus souvent qu'autrement laisse à désirer. Le plus connu de ces systèmes anciens, c'est la numération romaine. Dans ce système, XLIX représente un nombre qui n'a qu'une unité de moins que L, ce qui, à première vue, n'est pas particulièrement évident. Il n'est pas étonnant qu'avec un tel système, une simple multiplication comme XLIX multiplié par XVIII devienne une tâche extrêmement complexe et que l'élaboration d'algorithmes d'opérations, pour un tel système, soit quasi impensable.

Par contre, le système de numération indo-arabe, utilisé aujourd'hui, a grandement contribué, grâce à la simplicité des algorithmes qu'il permet d'effectuer, au développement de la mathématique en général et à l'accessibilité de cette dernière à un plus grand nombre de personnes.

Un des inconvénients majeurs du système de numération romaine et qui en fait sa complexité, c'est qu'il ne repose pas sur le principe de valeur positionnelle que l'on retrouve dans le système arabe, où un même chiffre peut représenter des nombres qui soient dix, cent, mille fois, plus grands (ou plus petits), selon la position que ce chiffre occupe dans l'écriture du nombre: 8, 80, 800, 8 000, 80 000.

Les deux caractéristiques essentielles du système de numération actuel consistent dans les deux principes suivants: une valeur **positionnelle** et une valeur **additive.** Ainsi, dans 88 888, chacun des huit, à cause de sa **position,** représente une valeur particulière: 80 000, 8 000, 800, 80, 8. Bien plus, 88 888 représente également la somme de ces différentes valeurs: 80 000 + 8 000 + 800 + 8.

Ces deux principes supposent une succession de regroupements effectués selon un schème établi arbitrairement à partir d'un certain nombre choisi comme base du système.

Comme les algorithmes de calcul se fondent en grande partie sur la numération, on ne saurait accorder trop d'importance à la compréhension d'un système basé sur un tel principe. Malgré la simplicité relative des algorithmes qui utilisent les propriétés du système de numération arabe, il ne faudrait pas se leurrer au sujet de cette simplicité. Si l'instrument offre de merveilleuses possibilités techniques, on ne tarde pas à se rendre compte, en le manipulant, qu'il implique un éventail assez complexe de relations et de propriétés d'opération dont il serait téméraire de minimiser l'importance et la difficulté.

Afin de favoriser le plus tôt possible une compréhension suffisante du système, on ferait bien de ne pas se limiter, au début, aux seuls groupements par **dix.** Puisque dans un tel cas, l'enfant de première année pourrait difficilement dépasser l'apprentissage des nombres jusqu'à cent, il est vraisemblable d'affirmer qu'il ne pourrait pas non plus effectuer de regroupements de 2e ordre, c'est-à-dire de regroupements de dizaines. Il serait donc souhaitable que, pour remédier à cet inconvénient, on lui donne l'occasion d'effectuer, à l'aide de manipulations, des regroupements dans des bases nettement plus petites comme (3, 4 ou 5).

1.4.1 Numération et addition

Une bonne connaissance de la numération positionnelle est donc indispensable pour préparer l'apprentissage de l'algorithme de l'addition. Ainsi, quand les enfants ont exprimé, en **base quatre,** un certain nombre d'objets (figure 1.4.1.1), on peut leur en donner une autre quantité (1.4.1.2) qu'on leur demande d'ajouter aux pre-

AU DÉPART: $\boxed{103}$

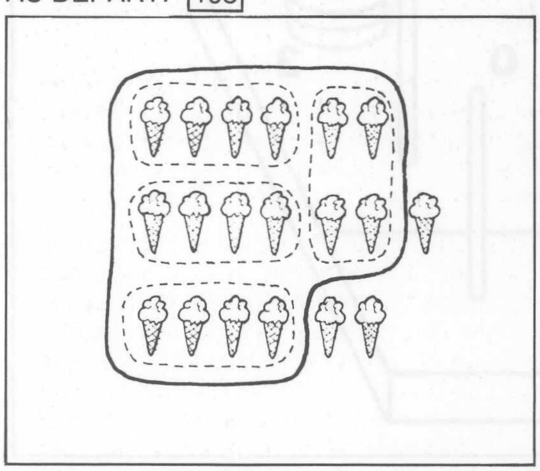


FIGURE 1.4.1.1

ON AJOUTE: $\boxed{132}$

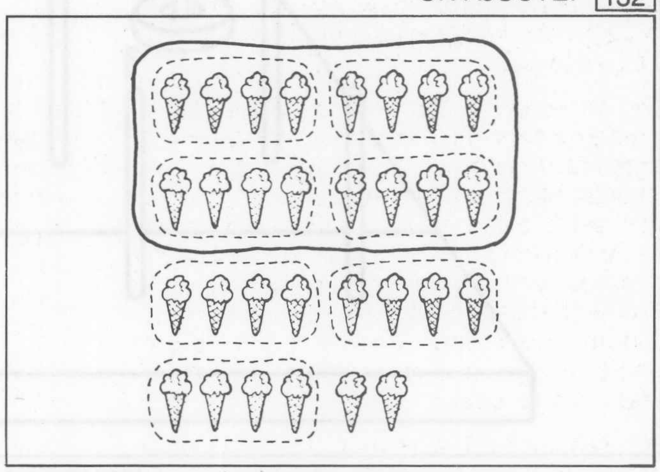


FIGURE 1.4.1.2

miers pour déterminer un nouveau nombre (figure 1.4.1.3).

ON OBTIENT: 301

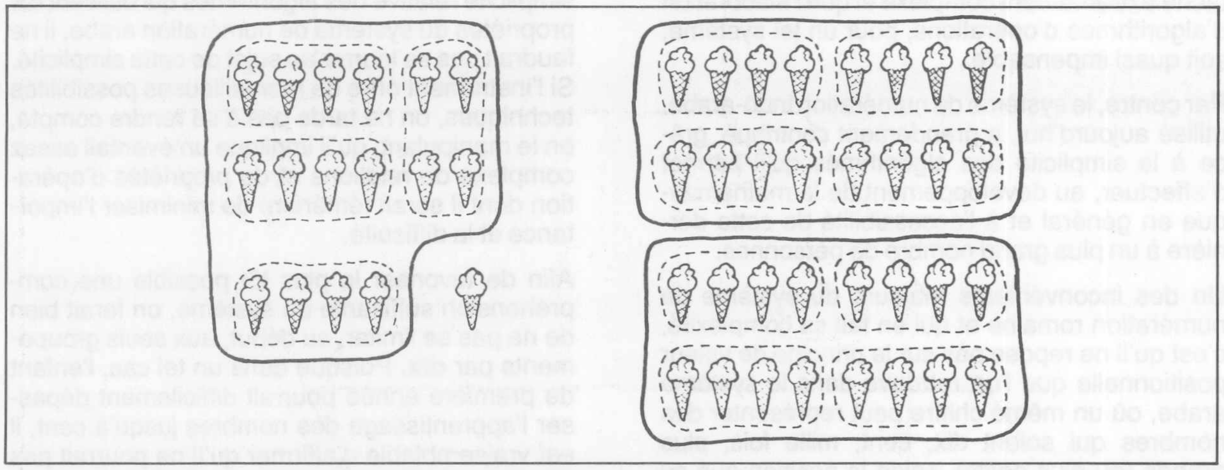


FIGURE 1.4.1.3

Il s'agit ici, et il importe de le préciser, uniquement de manipulations et non d'algorithmes, même si ces activités constituent un excellent moyen de préparer à plus ou moins long terme l'apprentissage de ce même algorithme.

Dans un tel système, le zéro joue un rôle essentiel; il convient de fournir aux enfants l'occasion d'utiliser ce symbole dans un contexte approprié.

L'utilisation d'un abaque peut souvent soutenir une telle démarche:

AU DÉPART:

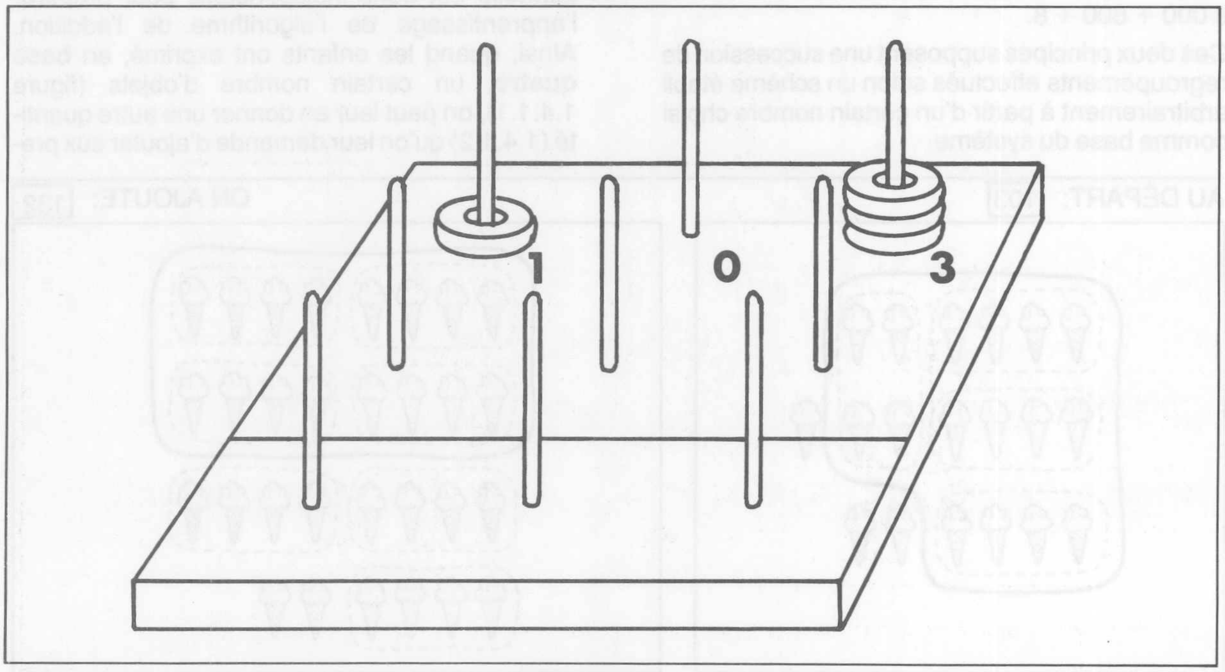


FIGURE 1.4.1.4

NOMBRE AJOUTÉ:

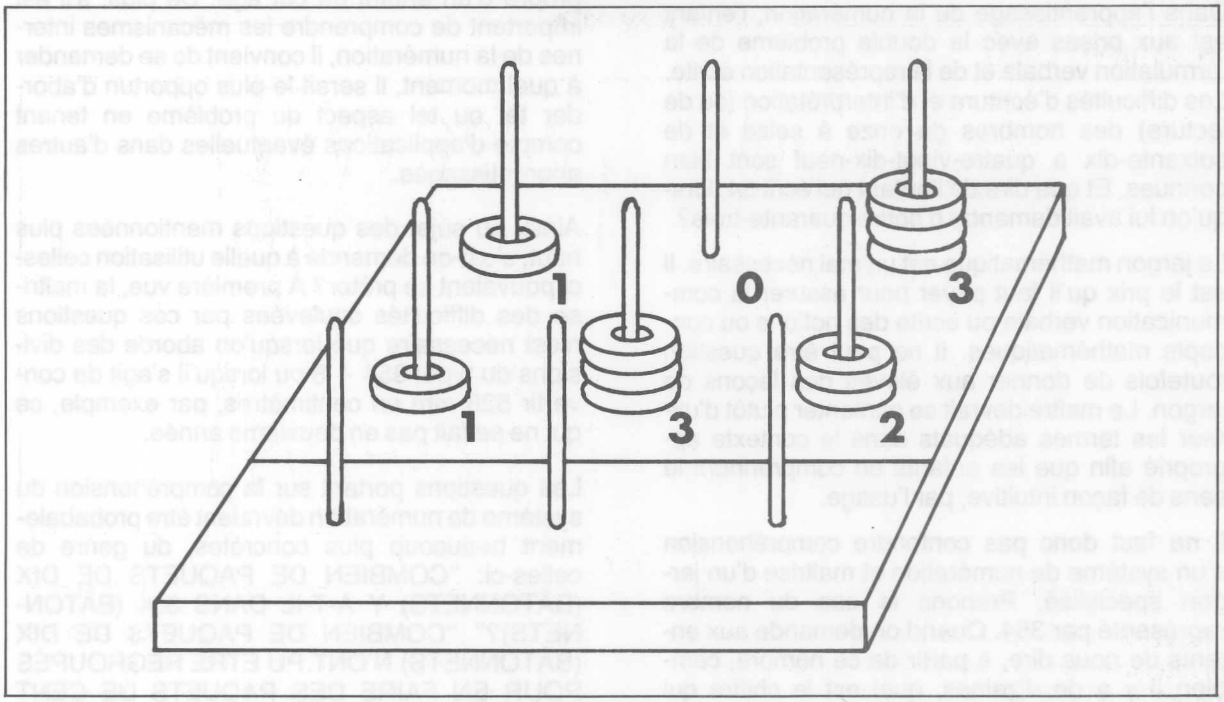


FIGURE 1.4.1.5

NOMBRE OBTENU:

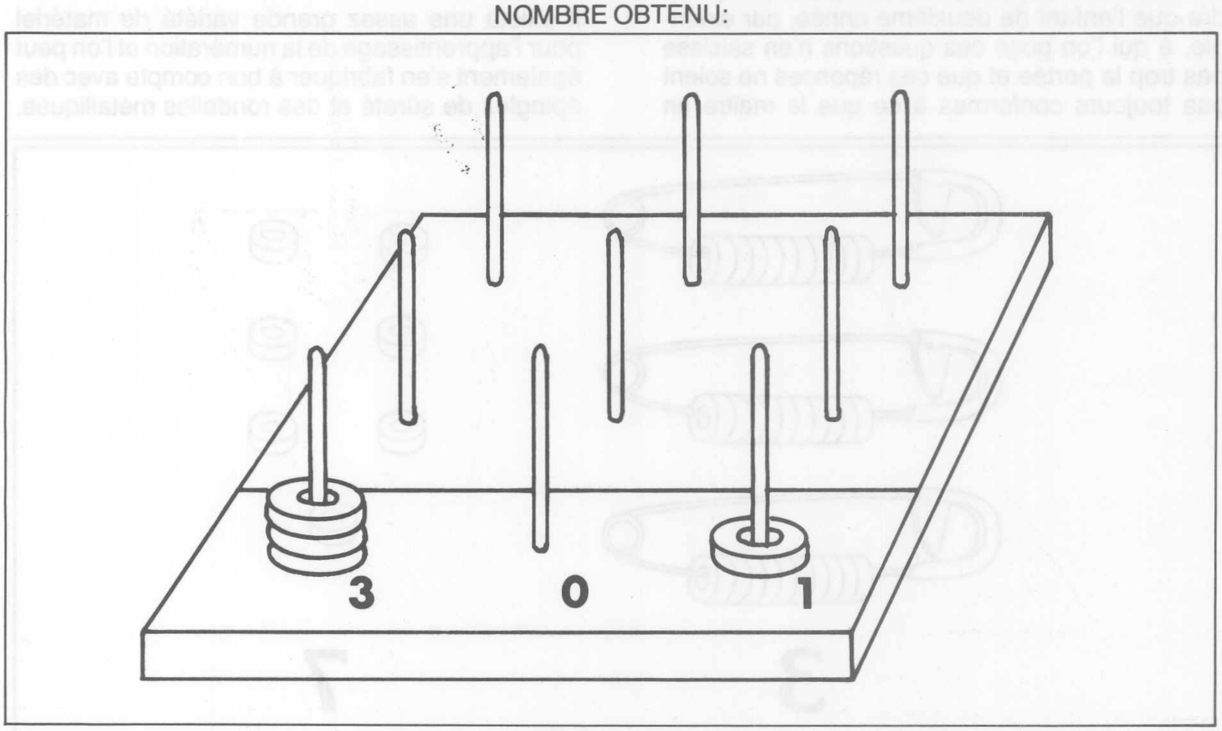


FIGURE 1.4.1.6

1.4.2 Terminologie et symbolisme

Dans l'apprentissage de la numération, l'enfant est aux prises avec le double problème de la formulation verbale et de la représentation écrite. Les difficultés d'écriture et d'interprétation (ou de lecture) des nombres de onze à seize et de soixante-dix à quatre-vingt-dix-neuf sont bien connues. Et que dire de l'enfant qui écrit 34, lorsqu'on lui avait demandé d'écrire quarante-trois?

Le jargon mathématique est un mal nécessaire. Il est le prix qu'il faut payer pour assurer la communication verbale ou écrite des notions ou concepts mathématiques. Il ne peut être question toutefois de donner aux élèves des leçons de jargon. Le maître devrait se contenter plutôt d'utiliser les termes adéquats dans le contexte approprié afin que les enfants en comprennent le sens de façon intuitive, par l'usage.

Il ne faut donc pas confondre compréhension d'un système de numération et maîtrise d'un jargon spécialisé. Prenons le cas du nombre représenté par 354. Quand on demande aux enfants de nous dire, à partir de ce nombre, combien il y a de dizaines, quel est le chiffre qui occupe la position des dizaines, quel est le nombre de dizaines, combien il y a de dizaines non groupées ou encore, ce que représente le 5 dans le nombre en question, il ne faut pas se surprendre que l'enfant de deuxième année, par exemple, à qui l'on pose ces questions n'en saisisse pas trop la portée et que ces réponses ne soient pas toujours conformes à ce que le maître en attend. Les nuances de langage ne sont pas le propre d'un enfant de cet âge. De plus, s'il est important de comprendre les mécanismes internes de la numération, il convient de se demander à quel moment, il serait le plus opportun d'aborder tel ou tel aspect du problème en tenant compte d'applications éventuelles dans d'autres apprentissages.

Ainsi, au sujet des questions mentionnées plus haut, s'est-on demandé à quelle utilisation celles-ci pouvaient se prêter? À première vue, la maîtrise des difficultés soulevées par ces questions n'est nécessaire que lorsqu'on aborde des divisions du type: $354 \div 8$ ou lorsqu'il s'agit de convertir 528 mm en centimètres, par exemple, ce qui ne se fait pas en deuxième année.

Les questions portant sur la compréhension du système de numération devraient être probabalement beaucoup plus concrètes, du genre de celles-ci: "COMBIEN DE PAQUETS DE DIX (BÂTONNETS) Y A-T-IL DANS 354 (BÂTONNETS)?" "COMBIEN DE PAQUETS DE DIX (BÂTONNETS) N'ONT PU ÊTRE REGROUPÉS POUR EN FAIRE DES PAQUETS DE CENT (BÂTONNETS)?" Là encore, ces questions devraient être posées à partir des groupements concrets effectués par les élèves.

Il existe une assez grande variété de matériel pour l'apprentissage de la numération et l'on peut également s'en fabriquer à bon compte avec des épingles de sûreté et des rondelles métalliques.

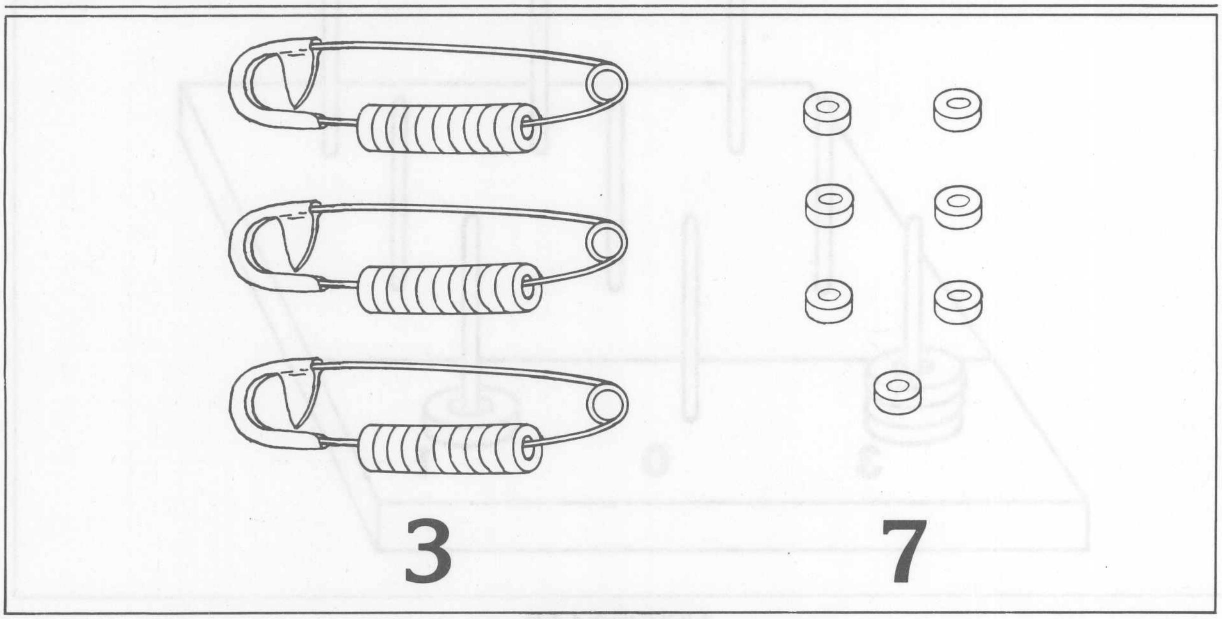


FIGURE 1.4.2

On pourrait enfin se servir d'un tableau semblable à celui qui est illustré en page 49, et demander aux enfants d'aller accrocher le jeton à la bonne place.

1.4.3 Les regroupements

La technique des regroupements exige une démarche fondamentale en mathématique qu'on retrouve appliquée non seulement à l'intérieur d'un système de numération, mais encore dans chacun des algorithmes d'opération utilisés dans les nombres naturels, en arithmétique modulaire et dans le traitement mathématique d'un très grand nombre de situations de la vie courante.

On reparlera plus loin du rôle de la numération dans l'apprentissage des algorithmes d'addition, de soustraction et de multiplication. En ce qui concerne la division des nombres naturels, il serait opportun de souligner ici comment les notions de regroupement se retrouvent à la base même de cette opération. Soit la division suivante: 37 ÷ 5. L'enfant groupera par 5. Il obtiendra sept groupes de 5 et deux éléments non groupés. Ici, contrairement au regroupement effectué quand on veut écrire un nombre dans une base donnée, l'opération s'arrête. Il n'y a pas de regroupements successifs.

C'est en partie pourquoi certains proposent de reporter l'étude de différentes bases de numération après l'étude de la division. On pourrait tout aussi bien avancer que l'acquisition d'habiletés de regroupement dans différentes bases prépare l'étude de la division plutôt qu'elle ne la suit.

Si dans la division ordinaire, ce qui est intéressant dans un regroupement par 5, 7 ou × éléments, c'est le nombre de groupements obtenus, en arithmétique modulaire, au contraire, ce sont les éléments non groupés qui retiennent l'attention. Ainsi, en supposant que ce soit aujourd'hui mercredi, dans dix-sept jours, on sera à 3 jours d'un mercredi, soit samedi (17 ÷ 7 = 2, reste 3). (Voir **Division et arithmétique modulaire, p. 55).**

On objecte souvent la difficulté des enfants à comprendre les principes des regroupements cachés derrière les techniques de manipulation d'un matériel comme celui des **blocs multi-bases.**

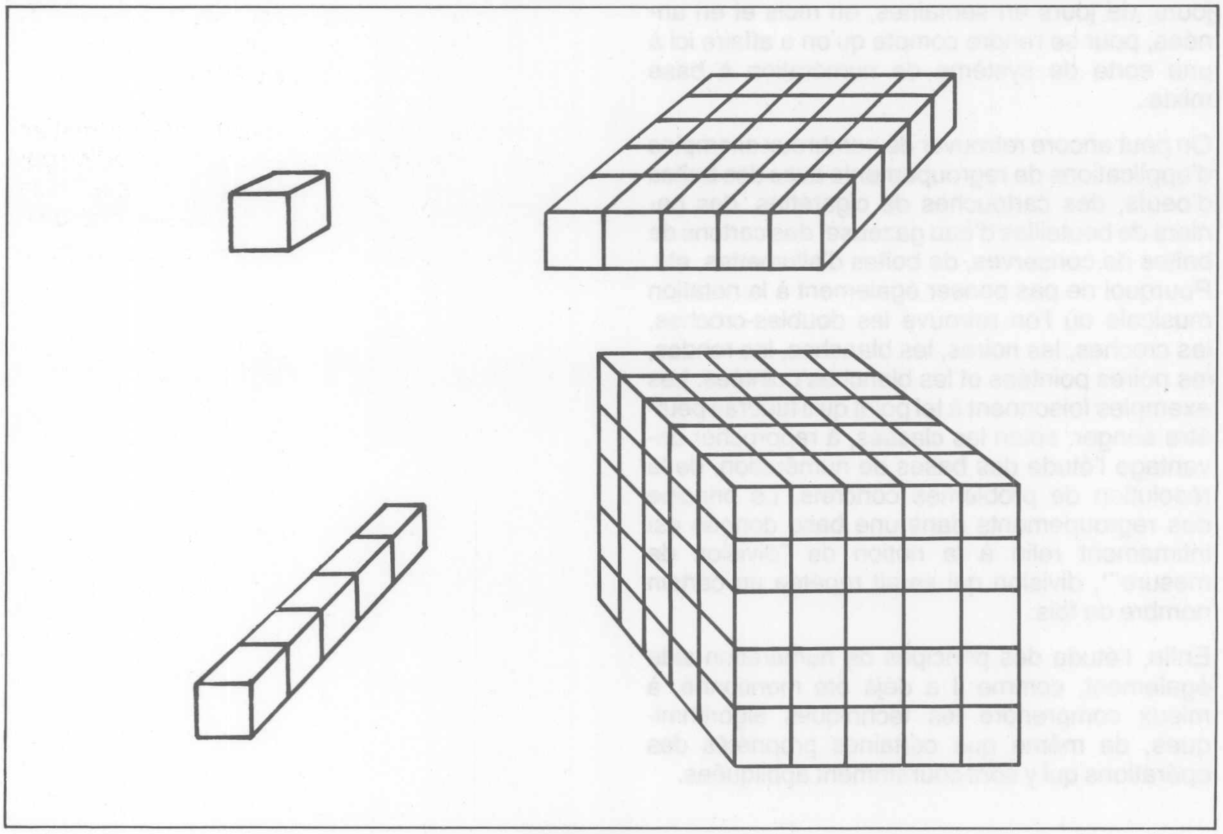


FIGURE 1.4.3

L'enfant ne voit pas toujours très bien que, dans une planchette de cinq sur cinq par exemple, il y a eu deux regroupements successifs. L'argument n'est pas sans valeur. Cependant, un usage gradué et judicieux de ce matériel permet des résultats excellents en ce qui concerne la compréhension, résultats qu'il sera toujours possible d'exploiter dans l'utilisation du matériel pour l'étude des fractions décimales.

Il serait prudent toutefois de ne pas s'en tenir à l'usage exclusif d'un seul matériel. Pourquoi ne pas utiliser, par exemple, pour les regroupements par **cinq**, les pièces de monnaie de 0,01 $, de 0,05 $ et de 0,25 $? Il existe également sur le marché plusieurs types d'abaques qui peuvent s'adapter facilement aux classes de l'enseignement primaire. On peut encore utiliser les réglettes Cuisenaire, des cubes centimétriques avec tenons et mortaises, etc.

Il ne faut pas oublier que si l'introduction des bases de numération au primaire semble récent, l'utilisation du principe des regroupements, elle, n'est pas nouvelle. Il n'est que de rappeler les nombreux exercices de conversion de secondes en minutes, de minutes en heures, d'heures en jours, de jours en semaines, en mois et en années, pour se rendre compte qu'on a affaire ici à une sorte de système de numération à base mixte.

On peut encore retrouver de nombreux exemples d'applications de regroupements avec des boîtes d'oeufs, des cartouches de cigarettes, des paniers de bouteilles d'eau gazeuse, des cartons de boîtes de conserves, de boîtes d'allumettes, etc. Pourquoi ne pas penser également à la notation musicale où l'on retrouve les doubles-croches, les croches, les noires, les blanches, les rondes, les noires pointées et les blanches pointées. Les exemples foisonnent à tel point qu'il faudrait peut-être songer, selon les classes, à rapprocher davantage l'étude des bases de numération, de la résolution de problèmes concrets. Le principe des regroupements dans une base donnée est intimement relié à la notion de "division de mesure"[1], division qui serait répétée un certain nombre de fois.

Enfin, l'étude des principes de numération aide également, comme il a déjà été mentionné, à mieux comprendre les techniques algorithmiques, de même que certaines propriétés des opérations qui y sont couramment appliquées.

([1]) Voir section 5.2, page 41.

CHAPITRE 2

L'addition des nombres naturels

2.1 Introduction

Dans l'apprentissage du nombre, on trouve tellement d'éléments divers qui s'entremêlent et se chevauchent qu'il semble très difficile de ne pas s'aligner sur une approche plutôt globale du problème. Qu'il s'agisse de sériation, de classification, de correspondance biunivoque, d'ordinalité ou de cardinalité, de mesure ou de rapport, de terminologie ou de symbolisme, de relation d'ordre ou d'équivalence, il serait sans doute téméraire de s'arrêter à un cheminement trop linéairement structuré dans cet apprentissage.

Les premières expériences d'addition que l'enfant a l'occasion de vivre ne font qu'ajouter à la complexité déjà fort grande de l'ensemble. Si l'on analyse le comportement de l'enfant qui commence à compter, on retrouve, à peu de chose près, tous les éléments déjà mentionnés:

a) terminologie et symbolisme

un	1
deux	2
trois	3
quatre	4
......	...

b) Ordinalité et correspondance biunivoque entre le premier élément et le nombre un, entre le deuxième élément et le nombre deux, etc.

c) relations entre ensembles et nombres:
- moins que, plus que
- un de plus, un de moins
- Alain qui a 5 ans, est né après Sophie qui en a 7, etc.

2.2 Terminologie et symbolisme

Les mots **additionner, ajouter** s'emploient dans une grande variété de situations qui sont loin de toujours représenter l'expression d'une somme de nombres. Ainsi, additionner un produit à la pâte d'un gâteau, ajouter du sucre à son café, sont des opérations physiques qui ne sont pas mathématiques en soi.

Dans la langue familière, **additionner** peut recouvrir un ensemble de réalités dont le caractère varie considérablement. Bien qu'en mathématique l'usage du terme ait été spécialisé pour lui donner le sens que l'on connaît, il n'en demeure par moins qu'en de multiples circonstances, ce même terme conserve toujours son usage courant.

Il faut se rappeler également qu'on ne peut établir de correspondance entre l'union de deux ensembles et la somme de leur cardinaux que si ces deux ensembles sont disjoints.

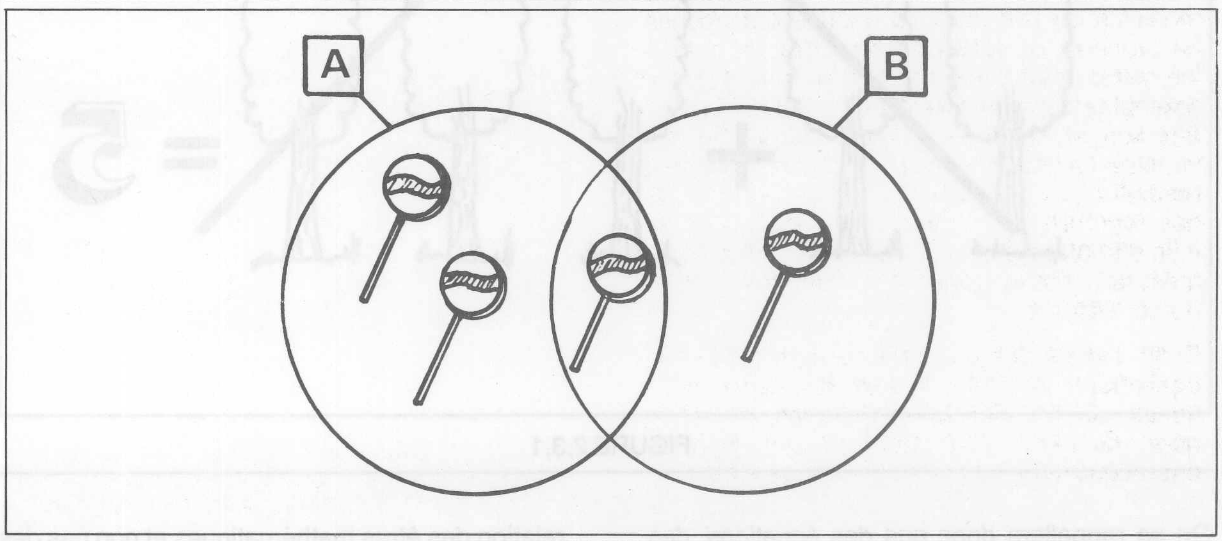


FIGURE 2.2

2.3 Quelques précisions

Si, d'une part, il existe une relation certaine entre l'addition et l'union d'ensembles disjoints (voir figure 2.3.2 a), il importe, d'autre part, de distinguer ce qui peut être une opération physique (mettre ensemble des objets), de l'opération ensembliste (union de deux ensembles) et de l'opération arithmétique (addition de nombres). On **évitera** avec soin des situations comme celle-ci:

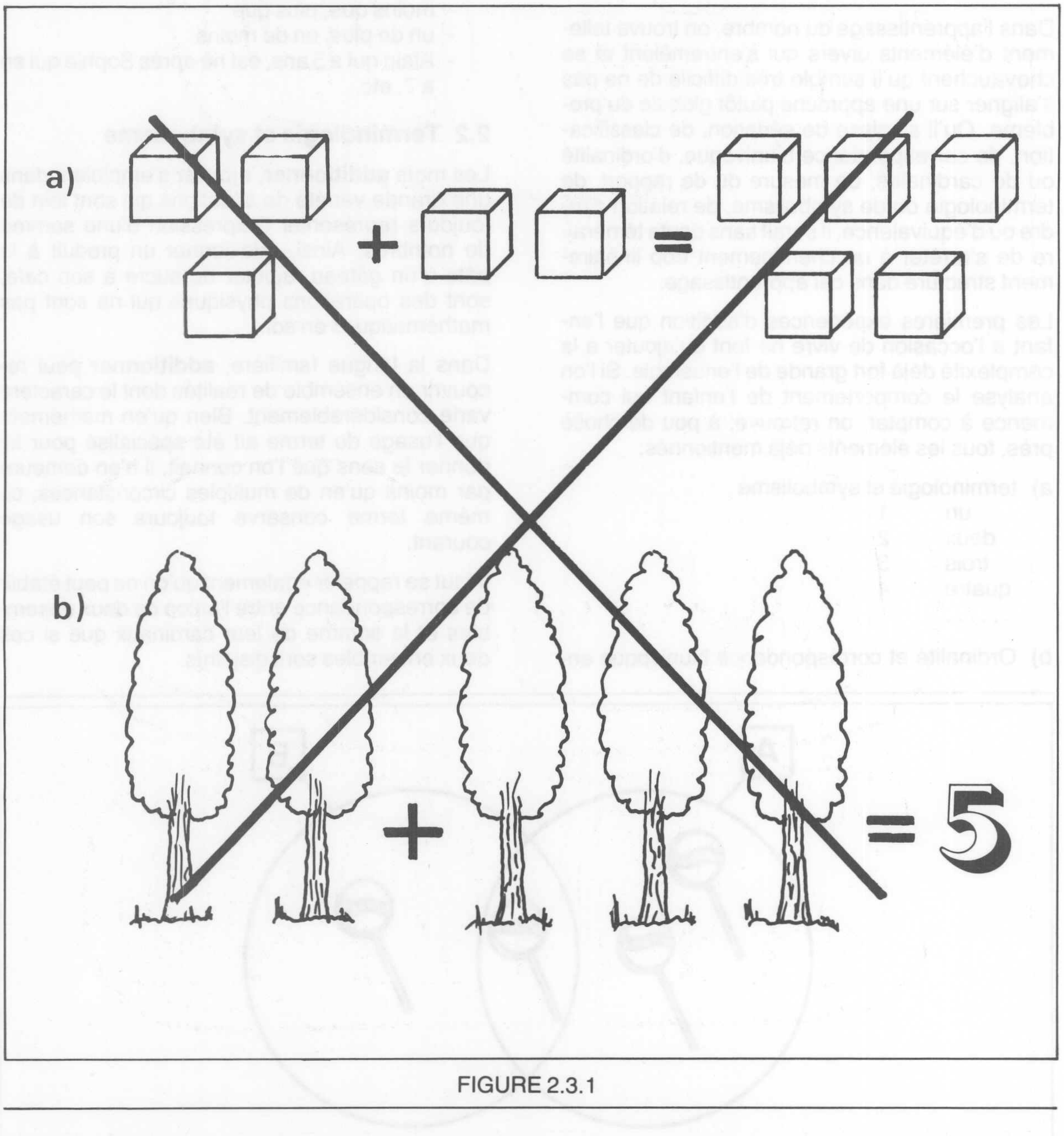


FIGURE 2.3.1

On se rappellera donc que des équations, des inéquations et des opérations doivent mettre en relation des êtres mathématiques et non pas des objets physiques.

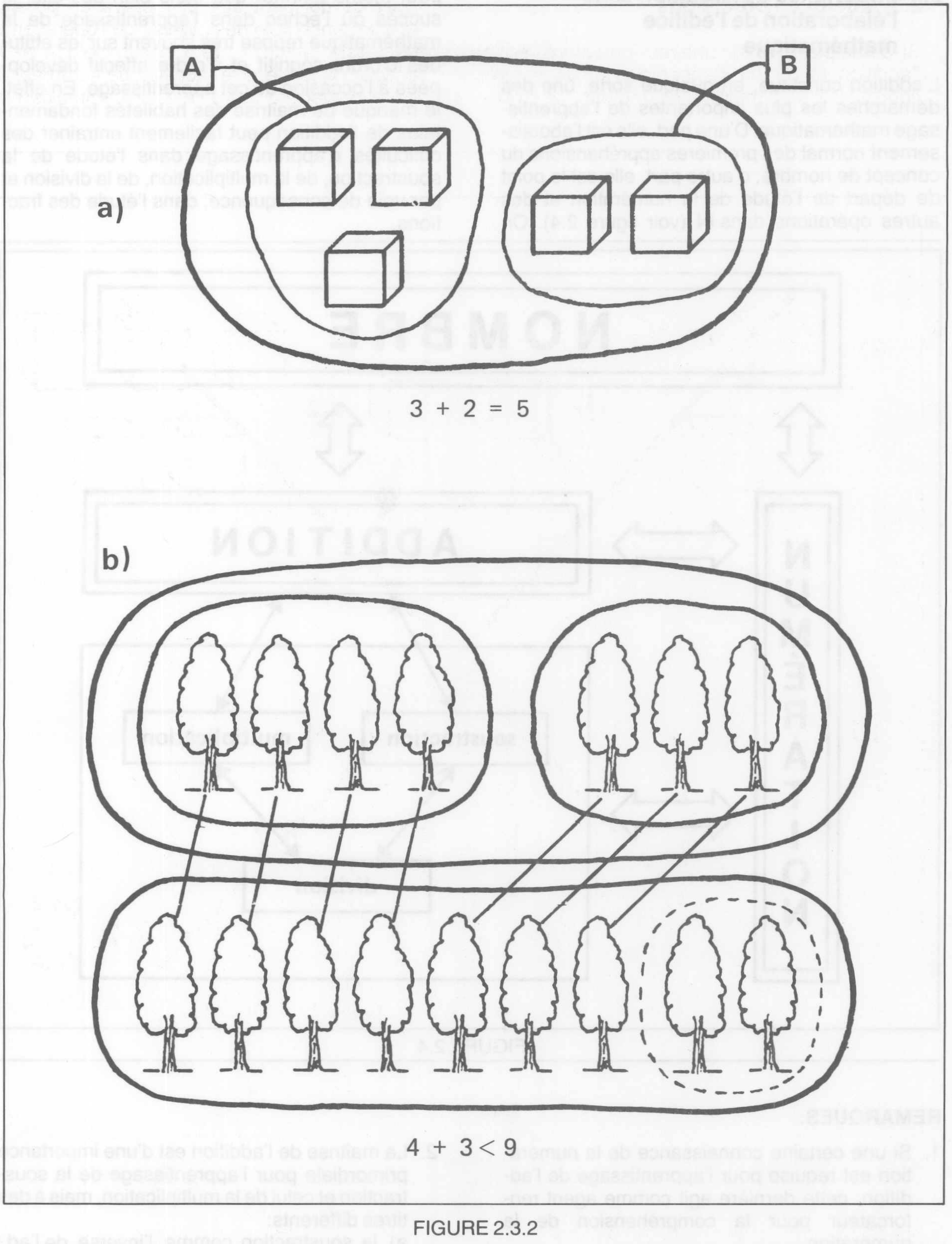


FIGURE 2.3.2

2.4 Importance de l'addition dans l'élaboration de l'édifice mathématique

L'addition constitue, en quelque sorte, une des démarches les plus importantes de l'apprentissage mathématique. D'une part, elle est l'aboutissement normal des premières appréhensions du concept de nombre; d'autre part, elle est le point de départ de l'étude de la numération et des autres opérations dans ℕ (voir figure 2.4). On peut même affirmer que dans bien des cas, le succès ou l'échec dans l'apprentissage de la mathématique repose très souvent sur les attitudes d'ordre cognitif et d'ordre affectif développées à l'occasion de cet apprentissage. En effet, le manque de maîtrise des habiletés fondamentales de l'addition peut facilement entraîner des difficultés d'apprentissage dans l'étude de la soustraction, de la multiplication, de la division et par voie de conséquence, dans l'étude des fractions.

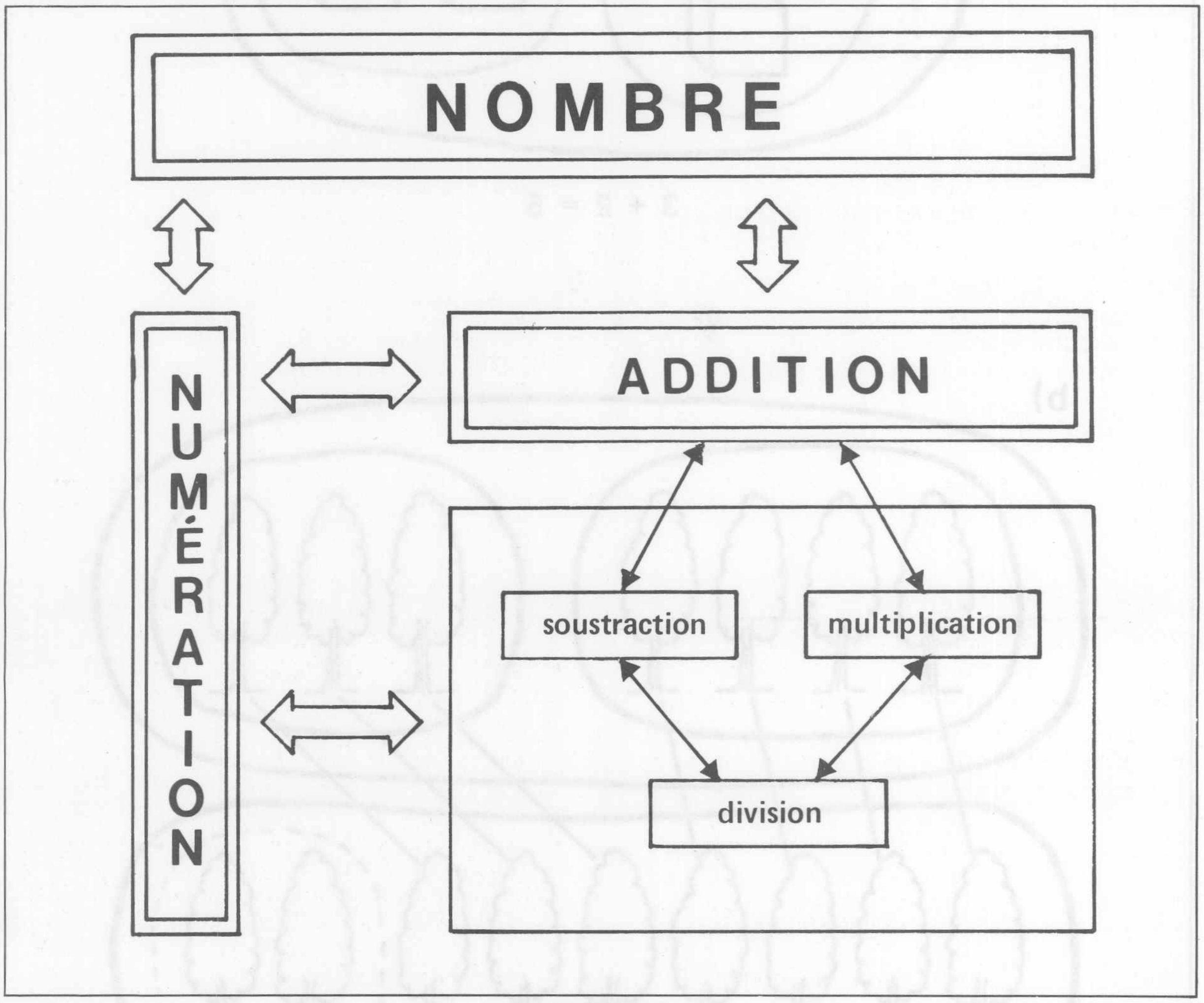


FIGURE 2.4

REMARQUES:

1. Si une certaine connaissance de la numération est requise pour l'apprentissage de l'addition, cette dernière agit comme agent renforçateur pour la compréhension de la numération.
2. La maîtrise de l'addition est d'une importance primordiale pour l'apprentissage de la soustraction et celui de la multiplication, mais à des titres différents:
   a) la soustraction comme l'inverse de l'ad-

dition,

b) la multiplication comme addition répétée d'un même nombre ou addition de produits partiels.

3. La soustraction de produits partiels contenus dans un dividende souligne bien l'importance de la maîtrise de la soustraction et de multiplication en vue de l'apprentissage des techniques de la division.

4. Si la numération joue un rôle prépondérant dans les algorithmes de soustraction, de multiplication et de division, celles-ci, tout comme l'addition, exercent à leur tour un rôle de renforcement et d'approfondissement de la connaissance des principes de numération.

2.5 Addition de deux nombres d'un chiffre

Pour amener l'enfant à une perception claire de ce qu'est l'addition de nombres d'un seul chiffre, il faut s'assurer que ses premières expériences mathématiques rejoignent son mode de pensée et que les premières notions numériques aient pour lui une signification réelle et concrète. C'est là, un principe fondamental de l'enseignement des mathématiques à des enfants, si l'on veut que la découverte du monde très riche des mathématiques soit pour eux une source d'émerveillement. L'enfant doit découvrir par lui-même, avec ses propres moyens, les sommes obtenues dans l'addition des nombres formés d'un seul chiffre.

Soit le nombre 6. L'enfant se sert d'un ensemble de six objets uniformes, comme des cubes de bois, des capsules de bouteilles, des billes ou tout autre matériel concret. Il doit ensuite partager cet ensemble en deux groupes distincts, de toutes les façons possibles. Il ne faut pas hésiter à lui faire prendre conscience qu'il est capable de partager l'ensemble des 6 objets en un groupe de 6 objets et en un groupe n'en contenant aucun, malgré le caractère abstrait de l'addition d'un nombre avec zéro. En effet, il peut faire intuitivement le lien entre l'opération d'addition et la réunion de deux ou plusieurs groupes d'objets en un seul (voir figure 2.3.2 a). Il perçoit de même très facilement, et sans formalisme, les autres propriétés de l'addition: la commutativité, l'associativité et l'unicité de la somme. De plus, le fait de travailler sur la notion de complémentarité d'un nombre constitue un premier apprentissage de la soustraction (voir chapitre 3).

On ne saurait trop insister sur la nécessité d'acquérir des automatismes de calcul en ce qui concerne les combinaisons fondamentales de l'addition puisque ce n'est qu'à cette condition qu'on pourra en arriver à une certaine maîtrise de la soustraction, de la multiplication et de la division (voir figure 2.4). Ce n'est également qu'à cette condition que l'enfant peut facilement élaborer et surtout découvrir des "régularités" de nombres (voir: Calcul mental et "régularités" chapitre 6, p. 58).

Dans une étape subséquente, les enfants en viennent à additionner des nombres d'un chiffre dont la somme dépasse 10. C'est ici que les notions de regroupement et de valeur positionnelle de la numération interviennent pour introduire l'algorithme proprement dit de l'addition.

Il faut bien prendre garde de ne pas tomber dans le piège toujours présent du formalisme. La meilleure façon d'atteindre les nouveaux objectifs proposés, c'est encore de le faire à l'aide de manipulations concrètes (voir figure 2.5).

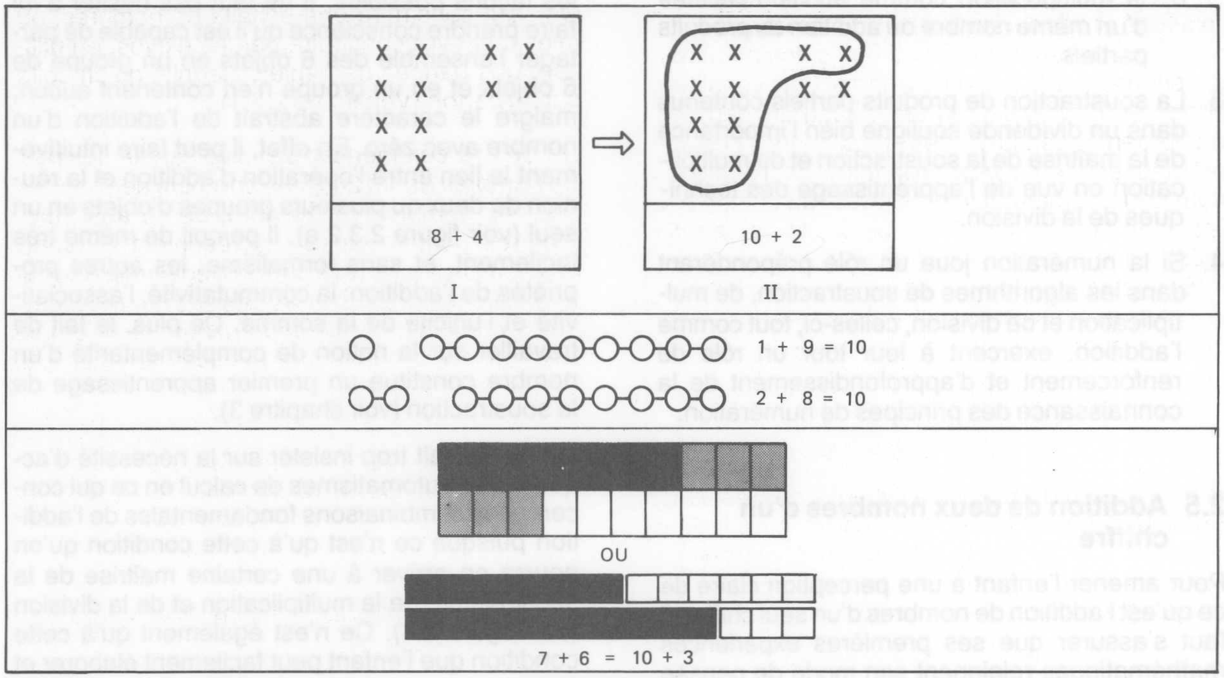


FIGURE 2.5

Les réglettes Cuisenaire semblent particulièrement bien se prêter à cette démarche. Le recours à des illustrations ou à des dessins, surtout s'ils sont faits par l'enfant, assure une transition intéressante vers la maîtrise des combinaisons fondamentales de l'addition.

2.6 Tables d'addition

Pourquoi ne pas les faire construire par les enfants, afin que ceux-ci puissent y recourir, le cas échéant, sans avoir à toujours manipuler des objets pour retrouver les sommes cherchées:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0									9
1		2			5				9	
2			4				8	9		
3				6			9			
4		5			8	9				
5					9	10		12		
6			8	9			12			
7			9			12		14		
8		9							16	
9	9									18

FIGURE 2.6

Au second cycle, les enfants peuvent même y faire plusieurs observations et en dégager des relations et des caractéristiques intéressantes. Ils peuvent constater que les doubles des nombres se situent sur l'axe de symétrie que constitue l'une des diagonales de ce tableau. Ils peuvent également y découvrir des "régularités", des symétries et même des propriétés de l'addition, comme la commutativité et le rôle du zéro. Il est facile de vérifier, en effet, que sur la rangée de même que sur la colonne du zéro, on retrouve intégralement soit les éléments de la colonne de gauche, soit les éléments de la rangée du haut. De même, on observe facilement que

$$2 + 6 = 6 + 2 = 8$$
$$1 + 4 = 4 + 1 = 5$$
$$5 + 7 = 7 + 5 = 12$$

et qu'il y a lieu d'associer la symétrie des résultats obtenus dans le tableau avec la propriété de commutativité. Enfin si l'on examine attentivement les lignes de nombres parallèles à la diagonale des doubles mentionnée plus haut:

0
2
4
6
.
.
.
18

on constate que ces obliques sont constituées de séries de nombres pairs consécutifs qui alternent avec des séries de nombres impairs. Quant à l'autre diagonale, la ligne des 9, on remarque qu'elle est constituée, de même que toutes les lignes de nombres qui lui sont parallèles, d'un même nombre dont la progression va du sommet à gauche, vers le bas à droite. De plus, chacune de ces lignes peut servir à rechercher tous les couples de nombres qui ont même somme: $0 + 9$; $1 + 8$; $2 + 7$; . . . ; $9 + 0$.

2.7 Droite des nombres

On peut construire une échelle de nombres, ou mieux, la faire construire par les élèves, en utilisant des bandes de papier quadrillé qu'on colle sur du carton (Voir figure 2.7.1).

On pourra commencer par une bande illustrant les nombres de 1 à 20; puis, on ajoute des bandes pour les nombres de 20 à 40, de 40 à 60, etc. D'autres petites bandes représentant chacune des nombres de 1 à 10 peuvent également servir à l'addition (ex.: $3 + 6 = 9$). Des additions successives d'une même bande préparent bien l'enfant à la multiplication, en le faisant compter par 2, 3, 5, 7, 9, 10, . . .:

2, 4, 6, 8, 10, 12, . . .
3, 6, 9, 12, 15, 18, . . .
4, 8, 12, 16, 20, 24, . . .
. . . .

ou encore, lui facilitent l'acquisition d'automatismes de calcul:

1, 3, 5, 7, 9, . . .
2, 5, 8, 11, 14, . . .
13, 23, 33, 43, 53, . . .

Compter à reculons est également un excellent exercice préparatoire à la soustraction et à la division:

15, 12, 9, 6, 3
50, 40, 30, 20, 10
25, 20, 15, 10, 5

L'addition à l'aide de la droite des nombres pose cependant un problème particulier: celui de la correspondance biunivoque entre un nombre et un point ou entre un nombre et une distance. C'est, en quelque sorte, une distinction à établir entre un état et un mouvement. Ainsi, $2 + 3$ peut

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

$$\boxed{3 + 6 = 9}$$

FIGURE 2.7.1

être interprété comme un déplacement d'une valeur de deux unités suivi d'un déplacement de trois unités.

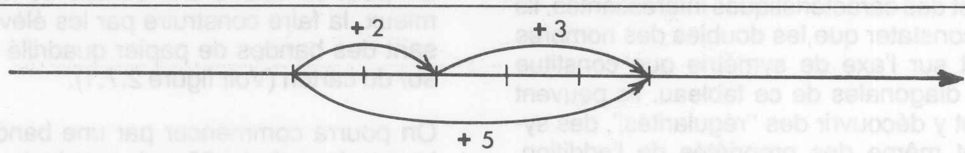


FIGURE 2.7.2

Dans ce mode d'interprétation, il n'est pas nécessaire d'établir les points de départ et d'arrivée des déplacements. Cependant, si les points de la droite sont déterminés par des nombres, il serait préférable de commencer les mouvements à zéro.

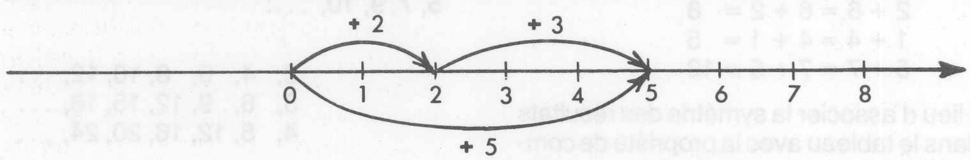


FIGURE 2.7.3

Soit le diagramme suivant:

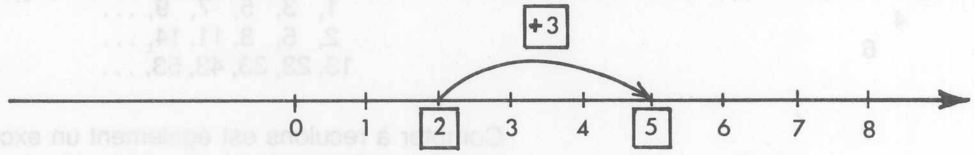


FIGURE 2.7.4

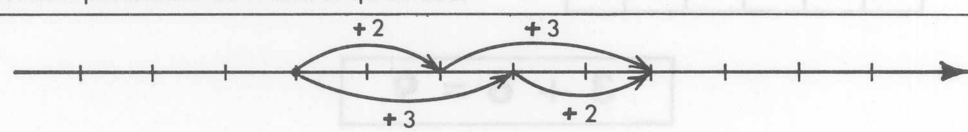
Il est clair qu'ici, on part du point 2 et qu'on se déplace de 3 unités pour arriver au point 5:

$$2 \xrightarrow{+3} 5$$

L'illustration de la figure 2.7.4 est d'utilisation facile. Mais, parce que + 2 et + 5 sont représentés par des points sur la droite des nombres tandis que + 3 est représenté par un déplacement le long de cette droite, le tout n'est pas aussi simple qu'il paraît. Précisément à cause de cela, on recommande généralement l'interprétation suggérée en termes de déplacements tel qu'il est illustré dans les figures 2.7.2 et 2.7.3 (ou, tout au moins, serait-il préférable de n'utiliser qu'un seul des deux procédés illustrés).

Les manipulations suggérées plus haut avec des bandes de papier quadrillé permettent peut-être d'éviter ce genre de subtilité.

Enfin, l'interprétation de l'addition en termes de déplacements sur la droite des nombres peut contribuer facilement à l'intelligence des propriétés de commutativité et d'associativité.



2 + 3 = 3 + 2

FIGURE 2.7.5

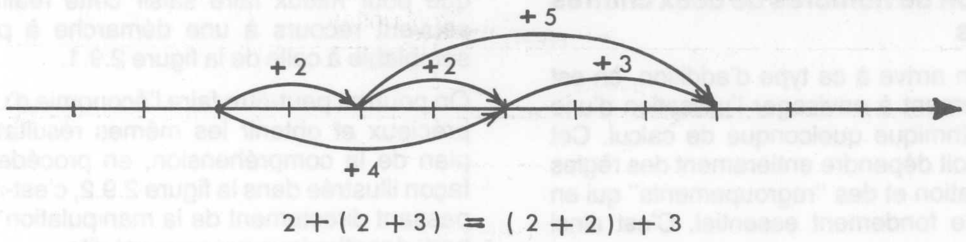


FIGURE 2.7.6

2.8 Fonction (état-opérateur)

Bien sûr, ces interprétations de l'opération d'addition sur la droite des nombres en termes de **mouvement-mouvement** ou **d'état-mouvement** touchent un peu à l'utilisation de la notion de **fonction** dans l'apprentissage de l'addition.

L'étude de l'opération d'addition ou de toute autre opération en termes **d'états** et **d'opérateurs** n'a pas besoin de justification élaborées. Si l'on utilise les machines à fonction suivante, on constate qu'à travers ces exemples de **transformation,** des **invariances** apparaissent de même que des applications du principe de **réversibilité.** Quand on connaît l'importance qu'on doit attacher à ces concepts dans l'élaboration de la pensée logique, on ne saurait négliger de considérer sérieusement cette façon d'envisager l'enseignement des opérations, en général, et de l'addition, en particulier. Il serait bon de se reporter ici au **Guide pédagogique** sur les concepts unificateurs pour y trouver plus de détails sur l'utilisation de la fonction.

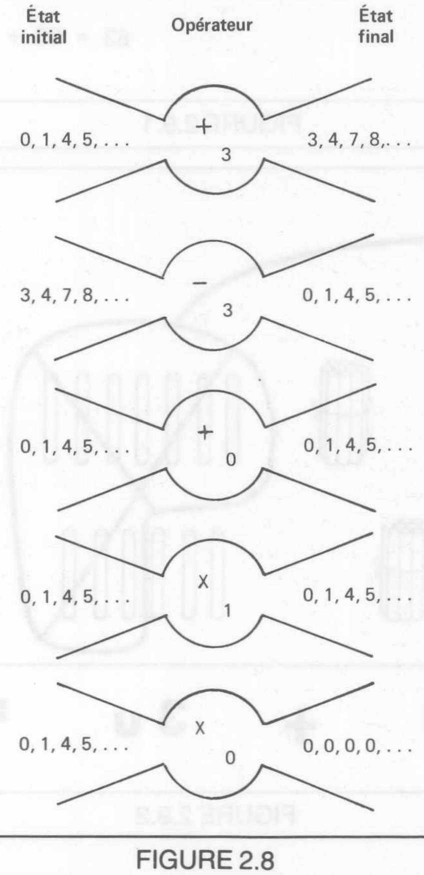


FIGURE 2.8

2.9 Addition de nombres de deux chiffres ou plus

Quand on en arrive à ce type d'addition, on est amené forcément à envisager l'utilisation d'une forme algorithmique quelconque de calcul. Cet algorithme doit dépendre entièrement des règles de la numération et des "regroupements" qui en constituent le fondement essentiel. C'est ainsi que pour mieux faire saisir cette réalité, on a souvent recours à une démarche à peu près semblable à celle de la figure 2.9.1.

On pourrait peut-être faire l'économie d'un temps précieux et obtenir les mêmes résultats sur le plan de la compréhension, en procédant de la façon illustrée dans la figure 2.9.2, c'est-à-dire en passant directement de la manipulation[1] à l'écriture algorithmique proprement dite.

Soit à additionner: $37 + 26$

On écrit:

$37 = 30 + 7$

$26 = 20 + 6$

$\_\_\_ = 50 + 13$

ou

$\_\_\_ = 50 + (10 + 3)$

ou

$\_\_\_ = (50 + 10) + 3$

ou

$63 = 60 + 3$

FIGURE 2.9.1

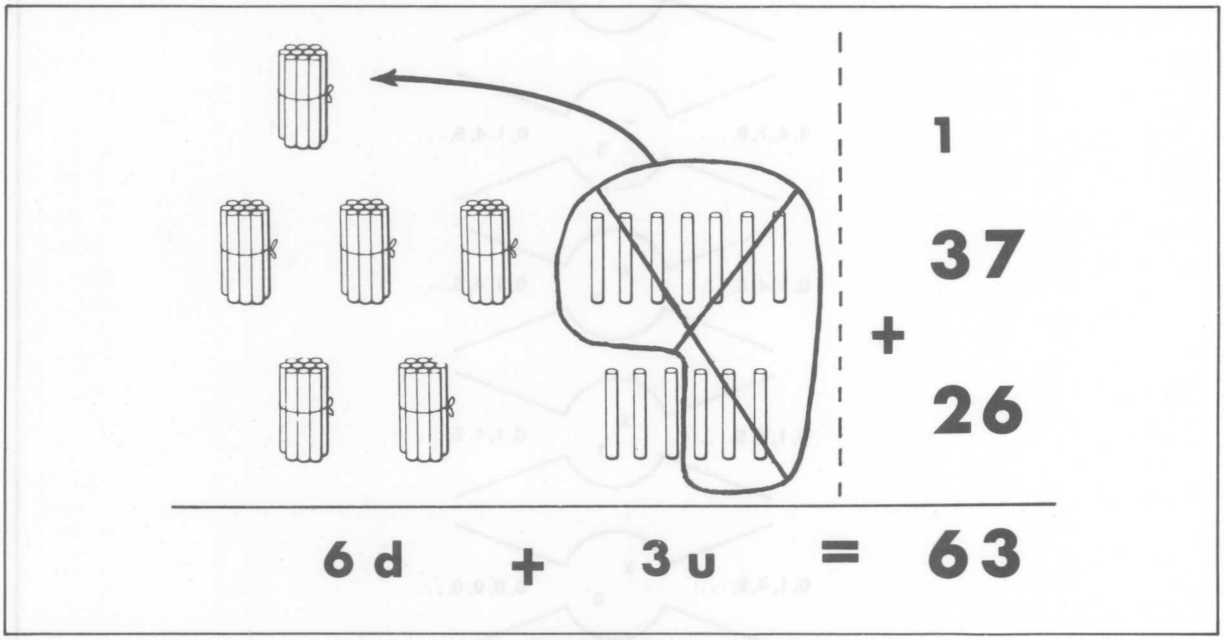


FIGURE 2.9.2

([1]) Bâtonnets, cubes, réglettes, etc.

On pourrait alors considérer les exercices du genre de celui qui est illustré à la figure 2.9.1 comme des exercices d'approfondissement plutôt que des exercices d'apprentissage.

D'une manière générale, dans l'apprentissage d'une opération, il est souhaitable de passer par les étapes suivantes:

1ère étape: manipulations concrètes d'objets ou même d'illustrations;

2e étape: manipulations concrètes et, en parallèle, écriture algorithmique de l'opération (voir figure 2.9.2);

3e étape: calcul écrit seulement (sans manipulation).

Ainsi, après avoir acquis une certaine maîtrise d'opérations d'addition semblables à celle qui est illustrée à la figure 2.9.2, on peut pousser cette maîtrise plus loin par des exercices du genre:

78	39	83
+ 46	+ 7	+ 52
6	85	78
___	___	___

ou encore:

285	1437	879
+ 54	+ 385	+ 628
687		534
___	___	___

etc.

Il ne peut être question ici de fixer un degré quelconque de difficulté ou de complexité de l'addition. Il vaut mieux aligner ses objectifs sur les besoins qu'on peut retrouver dans la résolution de problèmes tirés de l'environnement de l'enfant.

2.10 "Régularités"

Dans l'étude des nombres, il faut varier les situations de façon à favoriser la découverte de relations et de "régularités" dans des suites de nombres. Les grilles de nombres offrent des situations privilégiées de découvertes. Les enfants aiment colorier certaines cases de nombres à l'intérieur des grilles et voir surgir subitement des arrangements réguliers.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

FIGURE 2.10.1

On peut demander aux enfants de déterminer la différence entre deux nombres consécutifs d'une même colonne, de compter par 5, par 2, par 10, par 20 et de colorier les cases en question.

Qu'arriverait-il si l'on comptait par 3, par 7, par 8, par 11, par 12, . . .?

On peut reproduire plusieurs de ces grilles de la manière suivante. Sur une planche de contre-plaqué, on fixe dix rangées de dix clous et à chacun de ces clous, on accroche de petits disques numérotés de un à cent (voir figure 5.7.1 p. 49). Dans ce cas, au lieu de colorier des cases, on suspend les disques aux endroits appropriés.

Il serait aussi intéressant de comparer les "régularités" obtenues à l'aide de diverses grilles. (Voir figures 2.10.2 et 2.10.3).

On pourrait de même, à l'occasion, exploiter des situations analogues (carrés magiques, triangles de Pascal, nombres carrés, rectangulaires ou triangulaires, suite de Fibonacci) ou toute autre suite de nombres dont l'enfant pourrait découvrir ou inventer le modèle.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97	98
99	100	101	102	103	104	105

FIGURE 2.10.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

FIGURE 2.10.3

CHAPITRE 3

La soustraction [1]

Dès que l'enfant, dans l'apprentissage de l'addition, s'exerce à la recherche des "complémentaires" des nombres, il ne fait pas que de l'addition; il prend un premier contact avec la soustraction (Voir chapitre 2, pp. 16, 17).

$$0 + \square = 6$$
$$1 + \square = 6$$
$$2 + \square = 6$$

3.1 Trois types de situations physiques qui demandent l'utilisation de la soustraction

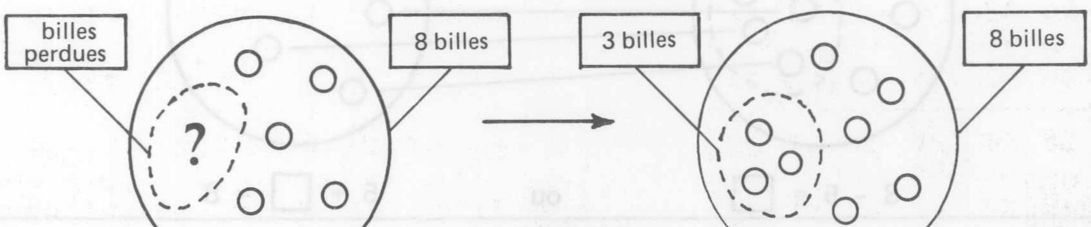
On utilise la soustraction pour résoudre trois types de situations physiques bien distinctes:

1. la recherche du complément d'un ensemble;
2. la soustraction proprement dite;
3. la comparaison entre deux ensembles.

Le fait qu'il n'y ait pas univocité entre la soustraction et ces trois types d'opérations physiques constitue un problème évident sur le plan pédagogique, problème dont il faut tenir compte dans l'établissement des stratégies d'enseignement de la soustraction.

1° Complément d'un ensemble

Dans ce premier cas, il s'agit de trouver le nombre d'éléments qui manquent pour compléter un ensemble. Exemple: Marie avait huit billes; elle n'en a plus que cinq. Combien en a-t-elle perdu?



$5 + \square = 8$ ou $8 - 5 = \square$

FIGURE 3.1.1

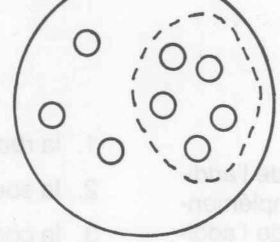
Ici, on a huit billes dans l'ensemble de référence. Un des sous-ensembles en comprend cinq. Combien y a-t-il d'éléments dans l'autre sous-ensemble?

2° Soustraction proprement dite

Dans la soustraction proprement dite, on part d'un ensemble de référence et l'on retranche un certain nombre d'éléments. Exemple: Marie a huit billes. Si on lui enlève cinq billes ou si elle les perd ou les donne, combien lui en reste-t-il? Ici, il s'agit réellement d'une soustraction au sens physique du terme.

(Voir la figure de la page suivante)

1. Dans l'ensemble des nombres naturels, la soustraction n'est pas une opération puisque IN n'est pas fermé pour la soustraction. On parlera de soustraction et non d'opération de soustraction.

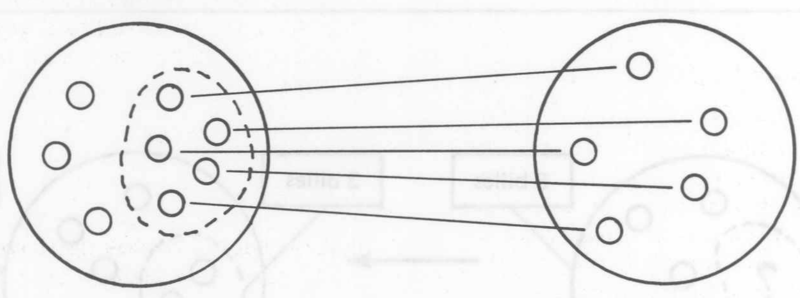


$8 - 5 = \square$ ou $5 + \square = 8$

FIGURE 3.1.2

3º Comparaison

Dans une comparaison on se demande combien un ensemble a d'éléments **de plus** ou **de moins** qu'un autre ensemble. Il ne s'agit plus d'un seul ensemble de référence, mais bien de deux ensembles distincts: Marie a huit billes et Jean en a cinq. Jean a combien de billes de moins que Marie?



$8 - 5 = \square$ ou $5 + \square = 8$

FIGURE 3.1.3

Après avoir établi une correspondance biunivoque, on se rend compte que Marie a trois billes de plus que Jean ou que celui-ci en a trois de moins que Marie. Ici, la représentation ensembliste est un peu plus complexe que dans les deux autres cas et la perception de la démarche à suivre n'est pas aussi immédiate. C'est d'ailleurs à partir de situations de ce dernier type qu'on introduit parfois (ou souvent ...) les entiers relatifs (voir le fascicule D sur les entiers relatifs).

Pourtant, ces trois types d'opérations physiques, pour différentes qu'elles soient sur le plan de la représentation, correspondent toutes à 8 - 5 = 3.

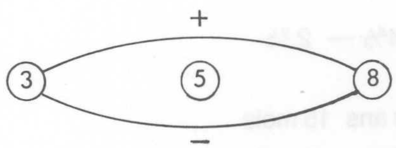
Il faut donc prendre garde, dans les exercices de manipulation d'objets, de ne pas se contenter de faire retrancher des objets d'un ensemble donné. Il faut veiller, au contraire, à présenter également des situations de complémentarité et de comparaison où les enfants cherchent à déterminer des différences entre les nombres d'éléments dont sont constitués deux ensembles. Le recours aux diagrammes peut servir d'illustration schématique de la situation et constituer une sorte d'étape intermédiaire entre la manipulation concrète et l'usage plus abstrait de la soustraction arithmétique.

3.2 Soustraction et addition

Dans chacun des exemples précédents, il existe une équivalence logique entre les deux équations suivantes:

$$\boxed{5 + \square = 8} \Longleftrightarrow \boxed{8 - 5 = \square}$$

La soustraction est, en effet, inverse de l'addition:



Ainsi, lorsque l'enfant constate que le fait de réunir 3 billes et 5 billes, lui permet d'en obtenir 8: $3 + 5 = 8$, il peut immédiatement se rendre compte qu'en retranchant 5 billes sur les 8 billes obtenues, il ne lui en reste que 3: $8 - 5 = 3$. À ce moment, il est initié non seulement à l'opération d'addition, mais encore à la soustraction, de sorte que l'apprentissage de l'addition et de la soustraction pourrait sans doute se faire concurremment.

3.3 Soustraction et algorithmes

Il ne faut pas fermer les yeux sur les difficultés évidentes de la soustraction. Celles-ci, en effet, sont trop souvent mésestimées. Si les opérations physiques décrites à la section 3.1 sont des activités auxquelles les enfants peuvent se livrer relativement tôt, le passage de l'opération physique à la soustraction arithmétique ne se fait pas sans difficultés. Plusieurs de ces difficultés d'apprentissage viennent d'ailleurs du fait que la soustraction n'est ni commutative, ni associative:

$$7 - 4 \neq 4 - 7$$
$$12 - (5 - 2) \neq (12 - 5) - 2$$

La soustraction, en effet, peut facilement devenir une source de confusion qui ne fait que s'accroître lorsque l'enfant aborde l'étude des entiers relatifs.

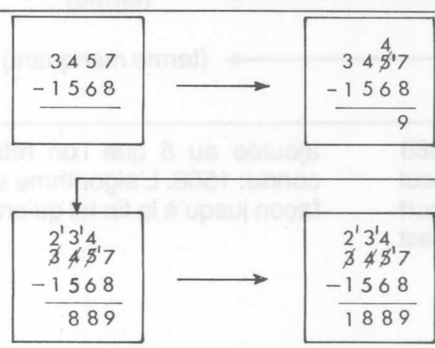
De plus, contrairement aux opérations physiques décrites à l'article 3.1 et qui portent sur des objets concrets, la soustraction arithmétique, elle, ne porte que sur des nombres. Elle doit donc, dans son expression ultime, faire abstraction de toute situation concrète. Et comme la soustraction ne peut être définie pour tout couple de nombres naturels, des conséquences d'ordre didactique sont à prévoir dans le choix et l'apprentissage des algorithmes de soustraction.

L'existence de problèmes concrets, semblables à ceux qui sont présentés en 3.1, a donné naissance à deux algorithmes principaux: la soustraction par emprunt et la soustraction par addition (ou par compensation). Si dans les cas de "complémentarité", la soustraction par addition semble convenir davantage, par contre, dans le deuxième cas, c'est la soustraction par emprunt qui semble être la plus appropriée. Quant au troisième cas, celui de la comparaison, l'une ou l'autre de ces deux **techniques algorithmiques** pourraient tout aussi bien être utilisées indistinctement.

Cependant, quand il s'agit simplement d'effectuer une soustraction où la référence à une situation concrète est tout à fait absente, ces distinctions ne veulent plus rien dire. On a le choix entre l'un ou l'autre de ces deux types d'algorithmes sans qu'on ait à justifier ce choix en s'appuyant sur une opération physique quelconque.(1)

Premier algorithme: la soustraction par emprunt

Pour effectuer cette soustraction, on procède comme suit:



(1) **NOTE:** On aurait avantage à consulter ici l'article de Réal Gauthier dans **Instantanés mathématiques,** Revue de l'APAME, vol. XII, no 4, avril 1976, p. 43-48.

Cet algorithme a le mérite d'être le plus connu et le plus répandu, ce qui ne lui confère pas automatiquement un caractère de supériorité sur le second. De plus, la technique sur laquelle il repose est assez lourde et plutôt encombrante. Les tenants de cette méthode invoquent également le fait que cet algorithme prépare mieux l'enfant à effectuer des soustractions du genre de:

1)	5 h 10 min − 2 h 23 min	⟶	4 h 70 min − 2 h 23 min
2)	$5\frac{1}{3} - 2\frac{2}{3}$	⟶	$4\frac{4}{3} - 2\frac{2}{3}$
3)	11 ans 3 mois − 7 ans 7 mois	⟶	10 ans 15 mois − 7 ans 7 mois

Deuxième algorithme: la soustraction par addition (ou par compensation)

Voici comment cette technique se présente. On peut partir de l'équivalence logique mentionnée en 3.2:

$$\boxed{3457 - 1568 = \square} \Longleftrightarrow \boxed{\underset{\text{somme}}{3457} = \underset{\text{terme}}{1568} + \underset{\text{terme}}{\square}}$$

Soustraction — Additon

Par conséquent, dans la soustraction suivante, on a:

- 3457 ⟶ (somme)
- − 1568 ⟶ (terme)
- $\square$ ⟶ (terme manquant)

Il s'agit de trouver le "complémentaire" de 1568 par rapport à la somme 3457. Comme on ne peut pas trouver de complémentaire pour 8 par rapport à 7, on le fait par rapport à 17 et la retenue est ajoutée au 6 que l'on retrouve dans le terme connu: 1568. L'algorithme s'effectue de la même façon jusqu'à la fin tel qu'on le voit illustré ici:

1) 3457
$-$ 1568
9

$8 + \square = 17$
$8 + 9 = 17$
et la retenue va au <u>6</u> de 1568

2) 3457
$-$ 1568
89

$7 + \square = 15$
$7 + 8 = 15$
et la retenue va au <u>5</u> de 1568

3) 3457
$-$ 1568
889

$6 + \square = 14$
$6 + 8 = 14$
et la retenue va au <u>1</u> de 1568

4) 3457
$-$ 1568
1889

$2 + \square = 3$
$2 + 1 = 3$

Tout se passe comme si l'on avait eu l'addition suivante avec terme manquant:

$$\begin{array}{r} 1568 \\ +\ \square \\ \hline 3457 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 1568 \\ +\ 1889 \\ \hline 3457 \end{array}$$

L'utilisation de cet algorithme comporte un avantage non négligeable puisque, pour en assurer la maîtrise, il suffit de bien connaître sa table d'addition.

Quel que soit l'algorithme dont on veut répandre l'usage, on peut se servir de la notation développée pour approfondir le rôle de la numération dans l'utilisation de cet algorithme.

3.4 Notation développée et algorithmes de soustraction

A. Notation développée dans la soustraction par emprunt
Exemple:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & 2000 & & 1300 & & 140 & & 17 \\ 3457 & = & \cancel{3000} & + & \cancel{400} & + & \cancel{50} & + & \cancel{7} \\ 1568 & = & 1000 & + & 500 & + & 60 & + & 8 \\ \hline 1889 & = & 1000 & + & 800 & + & 80 & + & 9 \end{array}$$

B. Notation développée dans la soustraction par addition (compensation)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3457 & = & 3000 & + & 400 & + & 50 & + & 7 \\ & & 2000 & & 600 & & 70 & & \\ -\ 1568 & = & \cancel{1000} & + & \cancel{500} & + & \cancel{60} & + & 8 \\ \hline 1889 & = & 1000 & + & 800 & + & 80 & + & 9 \end{array}$$

Il ne faut **pas abuser** de ces techniques, car on peut facilement y consacrer un temps considérable qu'on aurait avantage à utiliser à d'autres fins. Toutefois, des exercices de ce genre peuvent favoriser une meilleure compréhension de la soustraction et des relations qui peuvent exister entre celle-ci et l'expression numérique qui en résulte.

CHAPITRE 4

La multiplication

On peut aborder l'enseignement de la multiplication sous deux angles. D'aucuns considèrent cette opération comme le résultat d'additions répétées d'un même nombre, d'autres comme le cardinal du produit cartésien de deux ensembles. Le choix de l'une ou l'autre de ces approches dépend des options pédagogiques qui inspirent les maîtres dans l'interprétation des programmes.

4.1 Produit cartésien

Soit le tableau de la figure 4.1.1. Marie et Lucie ont chacune le choix entre trois robes. On peut donc obtenir les possibilités suivantes ou couples: (Marie, robe verte), (Marie, robe rouge), (Marie, robe jaune), (Lucie, robe verte), (Lucie, robe rouge), (Lucie, robe jaune). **L'ensemble** de ces couples constitue le produit cartésien de l'ensemble F par l'ensemble R. **On part d'ensembles et on aboutit à un ensemble.** Il n'est donc pas question ici de nombres.

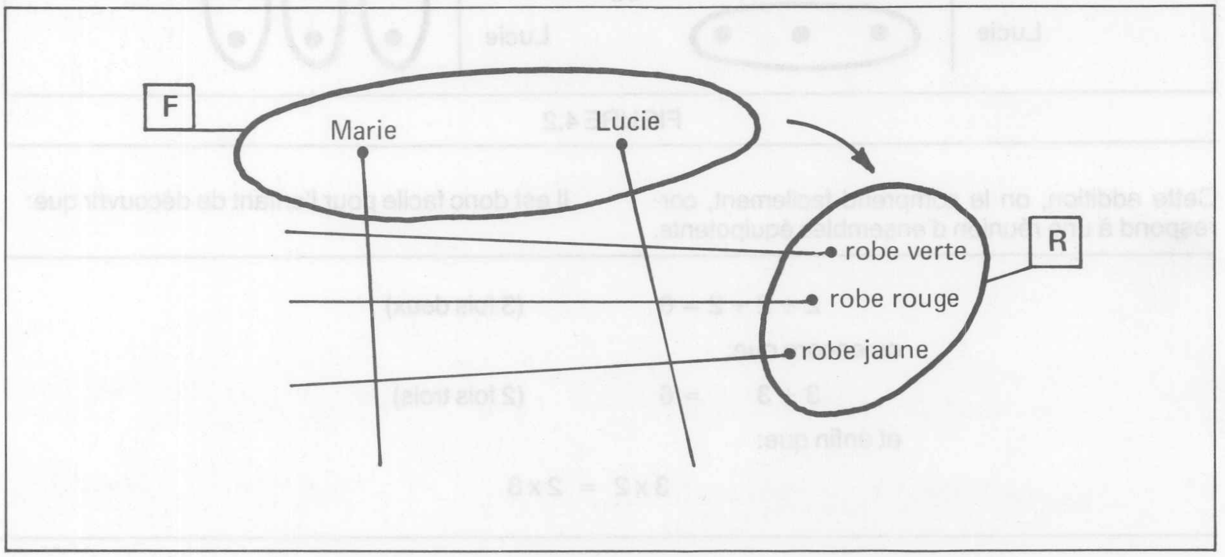


FIGURE 4.1.1

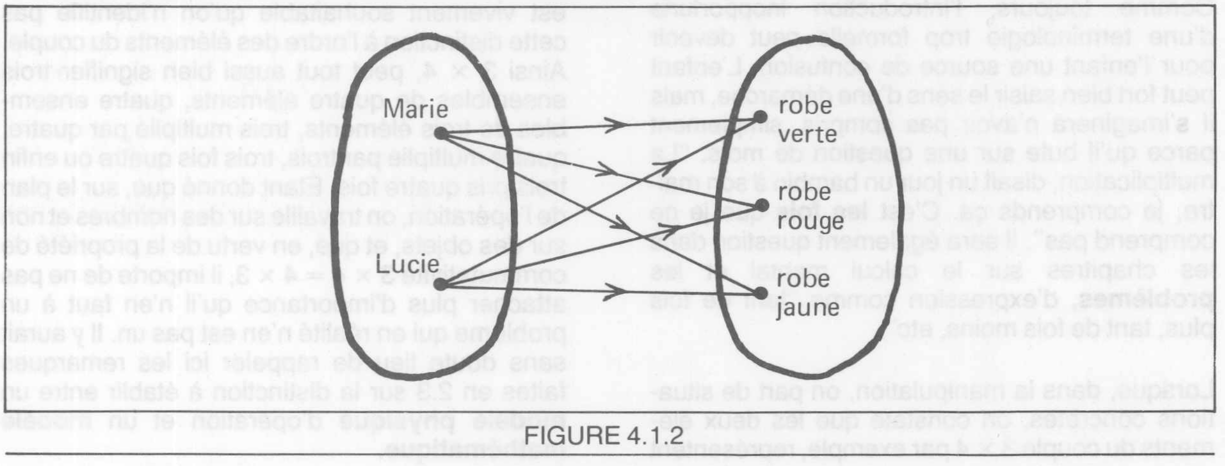


FIGURE 4.1.2

Si l'on fait correspondre à ce produit cartésien une opération sur les cardinaux de chacun de ces ensembles, l'opération obtenue devient une multiplication: $2 \times 3 = 6$.

4.2 Addition répétée d'un même nombre

La disposition de ces couples dans ces tableaux comme ceux des figures 4.1.1, 4.1.2 ou 4.2 peut suggérer des techniques de dénombrement axées sur l'addition répétée d'une même quantité.

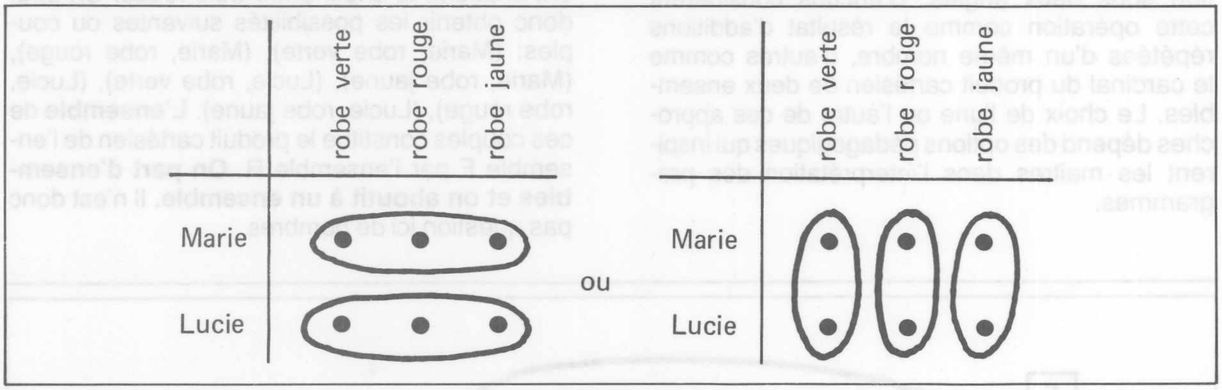


FIGURE 4.2

Cette addition, on le comprend facilement, correspond à une réunion d'ensembles équipotents.

Il est donc facile pour l'enfant de découvrir que:

$2 + 2 + 2 = 6$ (3 fois deux)

ou encore que:

$3 + 3 = 6$ (2 fois trois)

et enfin que:

$3 \times 2 = 2 \times 3$

4.3 Terminologie et symbolisme

Comme toujours, l'introduction inopportune d'une terminologie trop formelle peut devenir pour l'enfant une source de confusion. L'enfant peut fort bien saisir le sens d'une démarche, mais il s'imaginera n'avoir pas compris, simplement parce qu'il bute sur une question de mots. "La multiplication, disait un jour un bambin à son maître, je comprends ça. C'est **les fois** que je ne comprend pas". Il sera également question dans les chapitres sur le calcul mental et les **problèmes,** d'expression comme "tant de fois plus, tant de fois moins, etc".

Lorsque, dans la manipulation, on part de situations concrètes, on constate que les deux éléments du couple 3×4 par exemple, représentent des entités différentes (nombre d'éléments par ensemble et nombre d'ensembles). Cependant, il est vivement souhaitable qu'on n'identifie pas cette distinction à l'ordre des éléments du couple. Ainsi 3×4, peut tout aussi bien signifier trois ensembles de quatre éléments, quatre ensembles de trois éléments, trois multiplié par quatre, quatre multiplié par trois, trois fois quatre ou enfin trois pris quatre fois. Étant donné que, sur le plan de l'opération, on travaille sur des nombres et non sur des objets, et que, en vertu de la propriété de commutativité $3 \times 4 = 4 \times 3$, il importe de ne pas attacher plus d'importance qu'il n'en faut à un problème qui en réalité n'en est pas un. Il y aurait sans doute lieu de rappeler ici les remarques faites en 2.3 sur la distinction à établir entre un **modèle physique** d'opération et un **modèle mathématique.**

4.4 Notions de commutativité et de distributivité (multiplication)

Quel que soit l'approche souhaitable dans cet apprentissage, il est intéressant de constater que la plupart des situations qui aboutissent à une opération de multiplication se regroupent sous l'une ou l'autre des "régularités" illustrées par les figures 4.4.1 à 4.4.5.

Exemple: $3 \times 4 = 4 \times 3$

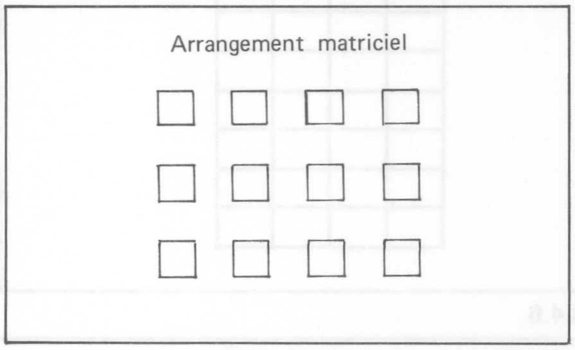


FIGURE 4.4.1

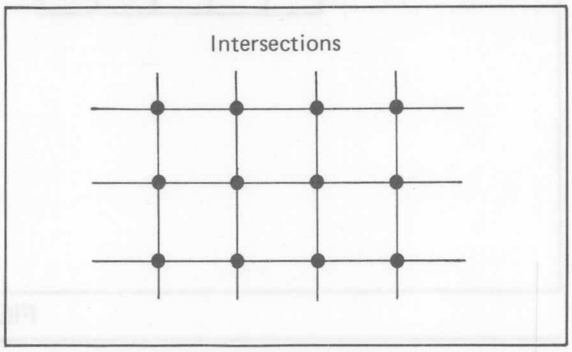


FIGURE 4.4.2

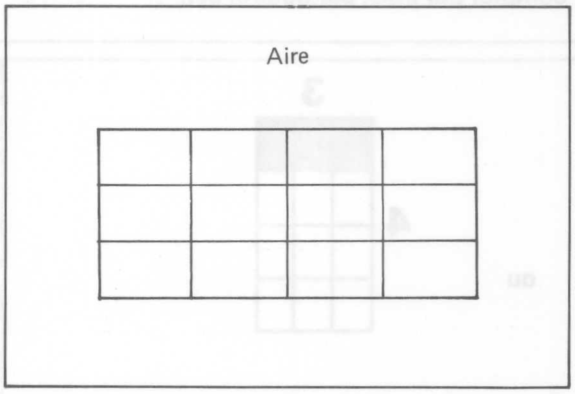


FIGURE 4.4.3

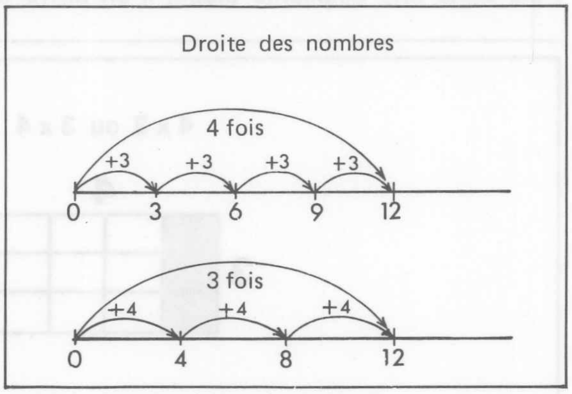


FIGURE 4.4.4

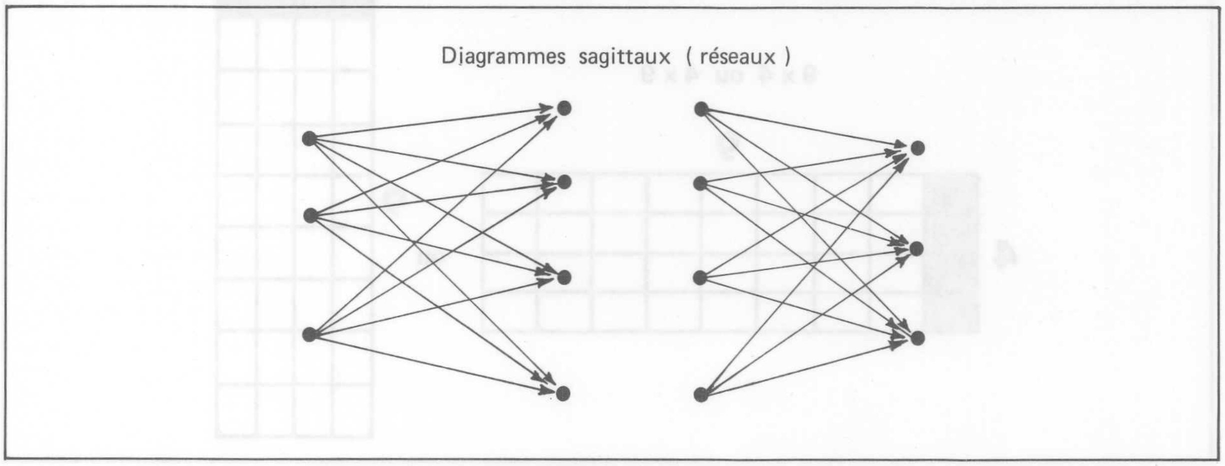


FIGURE 4.4.5

Dans une première démarche, l'enfant compte les éléments comme suit:

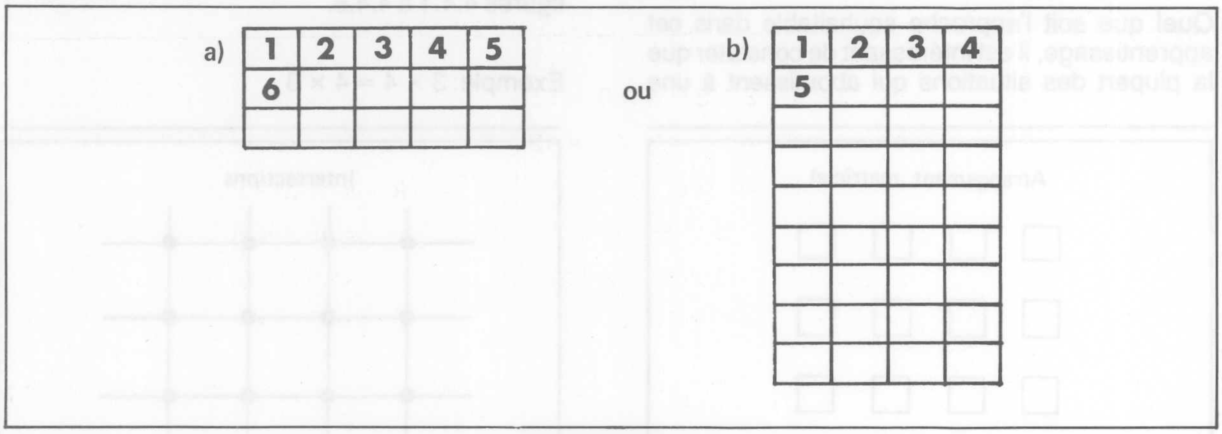


FIGURE 4.4.6

Puis dans une deuxième étape, il en arrive à compter par trois, par quatre, etc.

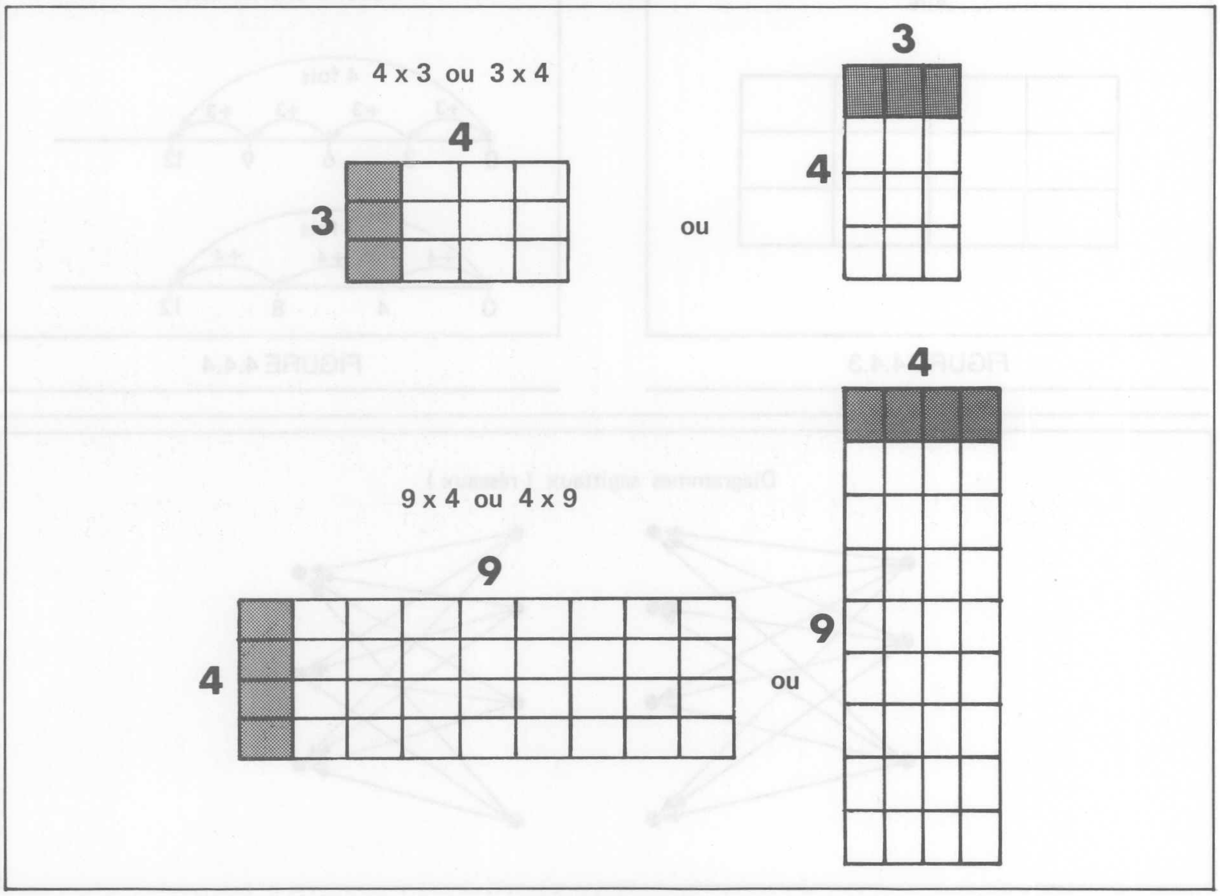


FIGURE 4.4.7

En manipulant des objets ou en observant des illustrations telles que celles qui sont représentées dans les figures 4.2.1 et 4.4.1 à 4.4.5, l'enfant découvre vite que:

a) $3+3+3+3=4\times3=12$

b) $4+4+4 \quad =3\times4=12$

c) $3\times4=4\times3$ (commutativité)

d) $(2\times3)+(2\times3)=4\times3$ (distributivité)

e) $(3\times1)+(3\times3)=3\times4$ (distributivité)

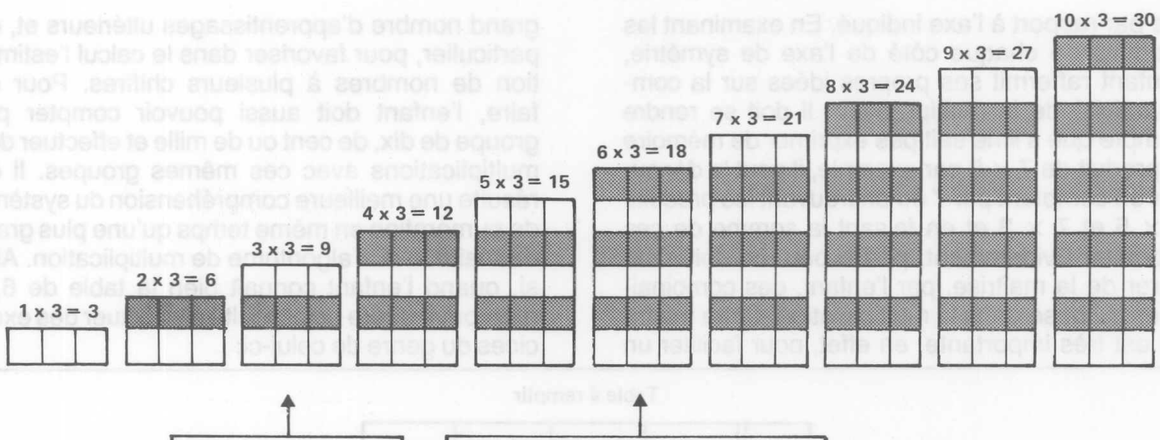
f) $(1\times4)+(2\times4)=3\times4$ (distributivité)

Ainsi l'enfant découvre les propriétés de la multiplication en même temps que l'opération elle-même.

4.5 Construction de tables

Au fur et à mesure de ses découvertes, on peut amener l'enfant à construire des tables comme la table de 3 illustrée ici:

Table de 3



Ex. :

$3+3+3=9$
$3\times3=9$

$3+3+3+3+3+3=18$
$6\times3=18$

FIGURE 4.5.1

Peu à peu, il peut construire sa table de multiplication telle qu'on la connaît (voir figure 4.5.2). On peut profiter des exercices proposés dans le chapitre sur l'addition (compter par 2, 3, 4, 5, . . .) pour la construction ou la vérification de la table de la figure 4.5.2. On remarque de plus, la symétrie par rapport à l'axe indiqué. En examinant les produits de chaque côté de l'axe de symétrie, l'enfant raffermit ses propres idées sur la commutativité de la multiplication. Il doit se rendre compte que s'il ne sait pas exprimer de mémoire le produit de 7 × 8 par exemple, il peut le découvrir en comptant par 7 ou en trouvant les produits 7 × 5 et 7 × 3 et en faisant la somme de ces produits. Évidemment, peu à peu, on doit s'assurer de la maîtrise, par l'enfant, des combinaisons de base dans la multiplication. Cette maîtrise est très importante, en effet, pour faciliter un grand nombre d'apprentissages ultérieurs et, en particulier, pour favoriser dans le calcul l'estimation de nombres à plusieurs chiffres. Pour ce faire, l'enfant doit aussi pouvoir compter par groupe de dix, de cent ou de mille et effectuer des multiplications avec ces mêmes groupes. Il en résulte une meilleure compréhension du système de numération en même temps qu'une plus grande maîtrise de l'algorithme de multiplication. Ainsi, quand l'enfant connaît bien la table de 6, il n'éprouve guère de difficulté à effectuer des exercices du genre de celui-ci:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		2	3	4	5	6	7	8	9
2	2		6	8	10				
3	3	6							
4	4	8							
5	5	10							
6	6								
7	7								
8	8								
9	9								

FIGURE 4.5.2

Table à remplir

x	6	60	600	6000
3				
4				
7				
9				

FIGURE 4.5.3

Comme pour l'addition où l'on recherche tous les couples de nombres qui ont même somme, on fait rechercher tous les couples de nombres qui ont même produit.

Addition	Multiplication
$\left.\begin{matrix}1+0\\0+1\end{matrix}\right\} = 1$	$\left.\begin{matrix}1\times 1\end{matrix}\right\} = 1$
$\left.\begin{matrix}0+2\\1+1\\2+0\end{matrix}\right\} = 2$	$\left.\begin{matrix}1\times 2\\2\times 1\end{matrix}\right\} = 2$
$\left.\begin{matrix}0+3\\1+2\\2+1\\3+0\end{matrix}\right\} = 3$	$\left.\begin{matrix}1\times 3\\3\times 1\end{matrix}\right\} = 3$
$\left.\begin{matrix}0+4\\1+3\\2+2\\3+1\\4+0\end{matrix}\right\} = 4$	$\left.\begin{matrix}1\times 4\\2\times 2\\4\times 1\end{matrix}\right\} = 4$
$\left.\begin{matrix}0+5\\1+4\\2+3\\3+2\\4+1\\1+4\\5+0\end{matrix}\right\} = 5$	$\left.\begin{matrix}1\times 5\\5\times 1\end{matrix}\right\} = 5$
	$\left.\begin{matrix}1\times 6\\2\times 3\\3\times 2\\6\times 1\end{matrix}\right\} = 6$
	$\left.\begin{matrix}1\times 7\\7\times 1\end{matrix}\right\} = 7$
	$\left.\begin{matrix}1\times 8\\2\times 4\\4\times 2\\8\times 1\end{matrix}\right\} = 8$
Complémentaires de	Facteurs de ......

FIGURE 4.5.4

On remarque que si la progression du nombre de couples qui ont **même somme** est régulière, il n'en va pas de même pour la **multiplication.** La recherche des couples qui ont même produit, ou recherche des facteurs, est une démarche qui constitue une étape essentielle vers l'apprentissage de la division et celui des fractions ordinaires (fractions équivalentes). Ces deux derniers apprentissages font d'ailleurs partie de ces "apprentissages ultérieurs" déjà mentionnés et qui nécessitent une bonne maîtrise des combinaisons fondamentales de la multiplication (connaissance des tables).

4.6 Utilisation des propriétés de la multiplication dans l'apprentissage de l'algorithme

Dès qu'on aborde l'étude de cette opération, comme on l'a vue plus haut, l'enfant est mis en contact avec les propriétés suivantes de la multiplication: associativité, commutativité et distributivité sur l'addition.

Bientôt l'enfant examine des situations qui demandent ou suggèrent des multiplications successives.

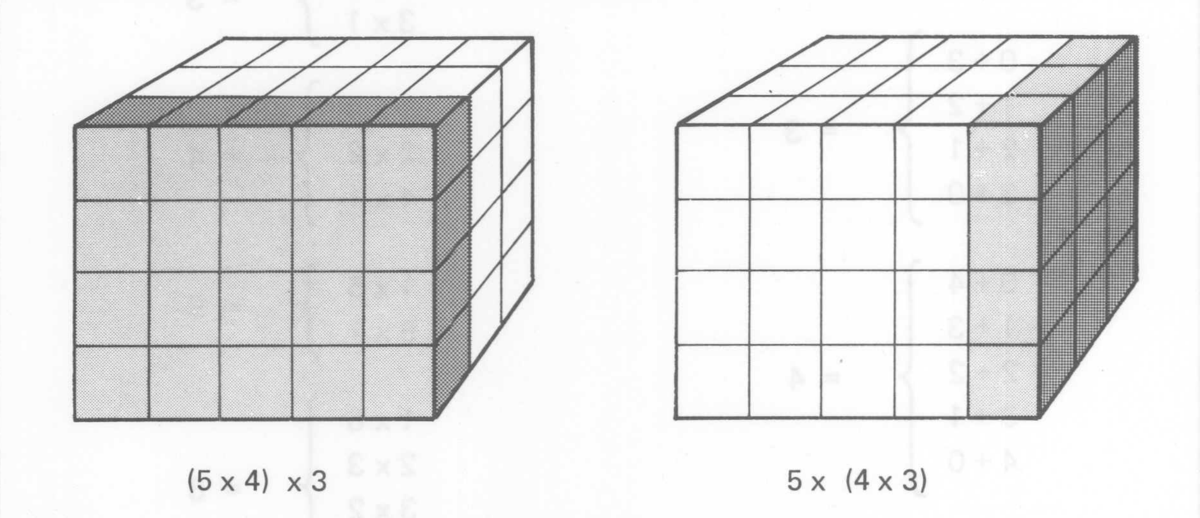


FIGURE 4.6.1

Tantôt les enfants suivent l'ordre de multiplication suggéré à gauche, tantôt ils procèdent dans l'ordre indiqué à droite.

L'algorithme de la multiplication, tel qu'on le connaît, ne peut exister sans l'utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition:

$$412 \times 37 = 412 \times (30 + 7) = (400 \times 37) + (10 \times 37) + (2 \times 37)$$

ou

$$412 \times 37 = 412 \times (7 + 30) = (412 \times 7) + (412 \times 30)$$

Quant à ce dernier produit 412 × 30, l'associativité permet d'écrire l'opération de deux façons différentes:

$$412 \times (3 \times 10) = (412 \times 3) \times 10$$

Il semble donc que, dans l'apprentissage d'un algorithme de multiplication pour des nombres de plus d'un chiffre, la connaissance au moins intuitive et pratique des propriétés de la multiplication soit indispensable.

On ne saurait aborder facilement l'étude de l'algorithme d'une opération sans recourir inévitablement à l'utilisation des propriétés de cette même opération. Il n'est pas nécessaire pour autant de faire une étude systématique de ces propriétés afin de pouvoir les nommer ou les reconnaître. Une connaissance pratique de ces propriétés devrait sans doute suffire (voir en 6.2).

L'utilisation de cubes ou de grilles peut constituer un excellent moyen pour introduire et même maîtriser l'algorithme de cette opération.

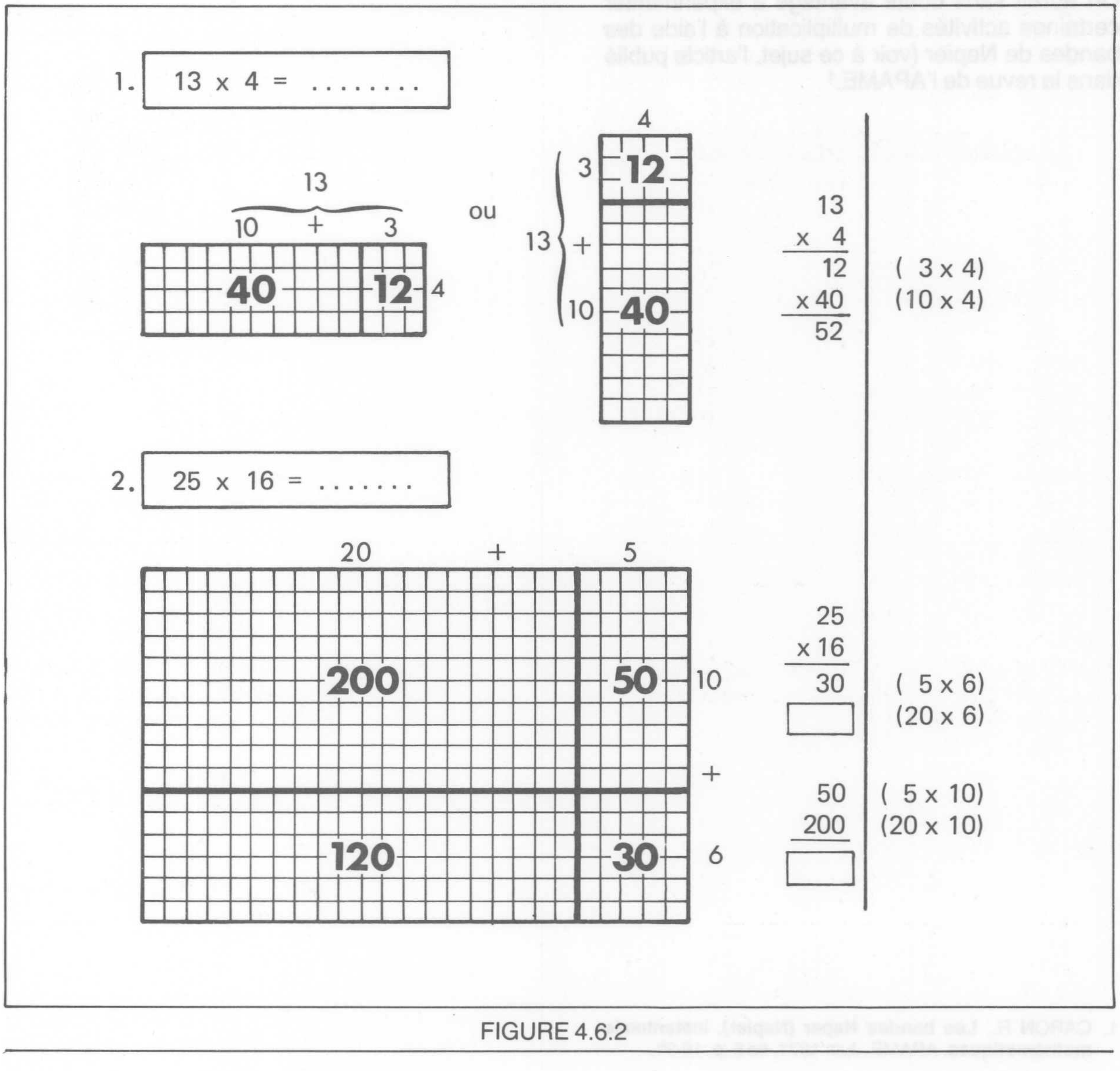


FIGURE 4.6.2

On en arrive ainsi, peu à peu, à la façon habituelle de procéder dans la disposition des nombres:

$$
\boxed{\begin{array}{rl}
412 & \\
\times\ \underline{37} & \\
2884 & = 412 \times 7 \\
\underline{12360} & = \underline{412 \times 30} \\
15244 & = (412 \times 7) + (412 \times 30)
\end{array}}
\rightarrow
\boxed{\begin{array}{r}
412 \\
\times\ \underline{37} \\
2884 \\
\underline{1236} \\
15244
\end{array}}
$$

On aurait sans doute avantage à expérimenter certaines activités de multiplication à l'aide des bandes de Napier (voir à ce sujet, l'article publié dans la revue de l'APAME.[1]

1. CARON R., **Les bandes Naper (Napier). Instantanés mathématiques.** APAME, Juin 1971, no 5, p. 16-21.

CHAPITRE 5

La division[1]

5.1 Introduction

La division est, sans aucun doute, plus difficile que l'addition, la soustraction et la multiplication. En effectuant des divisions, on est vite confronté avec les notions complexes de rapports et de fractions qui poussent souvent à l'introduction accélérée de l'ensemble des nombres rationnels.

Cependant, l'opération **physique** de division est bien familière au jeune enfant qui, dès son jeune âge, **partage** avec des camarades des bonbons, des billes, des cartes de joueurs de hockey ou de baseball, etc. Lorsque dans une classe, les enfants se divisent par sous-groupes ou par équipes, ils prennent conscience très rapidement de ce que signifient demis (partage en deux), et quarts (partage en quatre). Toutefois, les nombres impliqués dans ces exemples étant relativement petits, les enfants n'ont pas besoin d'un algorithme de division pour résoudre ces situations. Ils peuvent facilement le faire par l'inverse de la multiplication, c'est-à-dire $4 \times \square = 8$, un peu comme ils l'on fait auparavant pour résoudre des situations de soustractions à l'aide d'additions.

Cette relation entre la division et la multiplication est tellement importante et essentielle que la division n'est pas accessible à l'enfant tant qu'il n'est pas parvenu à une certaine maîtrise de l'opération de multiplication. Pour aborder l'algorithme de division proprement dit, avec des nombres plus grands, l'enfant devra avoir acquis un minimum d'habileté dans la résolution de l'addition, de la soustraction et de la multiplication. La division est un procédé où l'enfant "multiplie" facilement les erreurs de technique ou de calcul, contribuant ainsi à créer chez lui un profond sentiment de confusion et de frustration. Il a donc tout à gagner à découvrir lui-même les techniques relatives à la division et à les utiliser dans une progression qui s'aligne à la fois sur son rythme d'apprentissage et sur sa compréhension.

5.2 Division de partage et division de mesure (de contenance)

Cette distinction réfère bien davantage à une opération physique portant sur des objets qu'à une division mathématique portant sur des nombres.

Quand, dans la multiplication, on part d'une situation concrète (voir figure 5.2.1), il s'agit toujours d'un certain nombre d'ensembles équipotents; en effet, les facteurs représentent toujours des entités différentes, c'est-à-dire un nombre d'ensembles et un nombre d'éléments par ensemble: quatre ensembles de six éléments (ou vingt-quatre éléments).

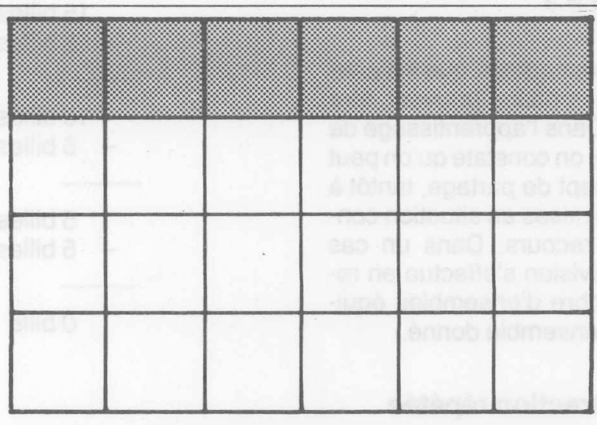


FIGURE 5.2.1

1. Dans l'ensemble des nombres naturels, la division n'est pas une opération puisque IN n'est pas fermé pour la division. On parlera de division et non d'opération de division.

De toute façon, le produit lui-même correspond toujours à un nombre d'éléments. Il faut encore se rappeler que l'opération de multiplication porte uniquement sur des nombres et non sur des pommes, des boutons ou des carrés. En principe, il faudrait éviter d'écrire:

6 carrés $\times$ 4 = 24 carrés
6 pommes $\times$ 4 = 24 pommes
etc

et se limiter à une écriture du genre:

$$6 \times 4 = 24$$

Ces considérations sur la multiplication trouvent évidemment leur pendant avec la division. Si l'on se reporte de nouveau à la figure 5.2.1, on peut se poser deux types de questions:

a) **Combien d'ensembles** de carrés y a-t-il dans 24 carrés? ou d'ensembles de 6 pommes dans 24 pommes. C'est une **division de mesure ou de contenance.**

b) **Combien y a-t-il de carrés ou d'éléments** dans chaque ensemble si je partage mes 24 carrés en 6 ensembles? (voir figure 5.2.2) ou combien chacun des 6 enfants recevra-t-il de pommes si je partage 24 pommes entre eux? C'est la **division de partage.**

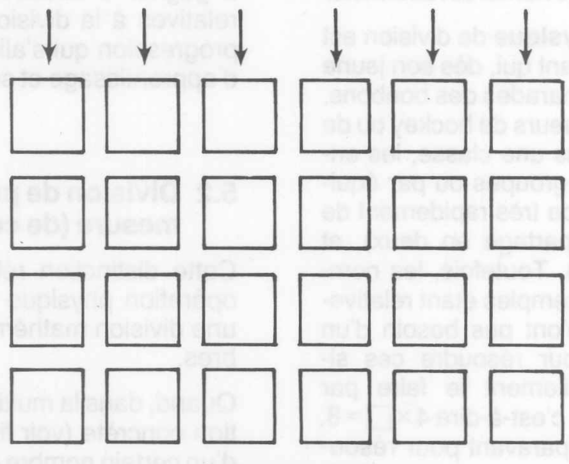


FIGURE 5.2.2

Ces deux types de situations concrètes se résolvent par la même division arithmétique:

$$24 \div 6 = 4$$

On ne saurait conclure, pour autant, que les concepts de partage et de mesure peuvent être ignorés de l'enseignant. Dans l'apprentissage de la technique de la division, on constate qu'on peut faire appel tantôt au concept de partage, tantôt à celui de mesure selon les mises en situation concrètes auxquelles on a recours. Dans un cas comme dans l'autre, la division s'effectue en retranchant un certain nombre d'ensembles équipotents d'éléments, d'un ensemble donné.

5.3 La division, soustraction répétée

Soit un ensemble de 20 billes. Si l'on se demande combien d'ensembles de 5 billes on peut former à partir de cet ensemble, on obtient:

20 billes	
− 5 billes	1 ensemble
15 billes	
− 5 billes	1 ensemble
10 billes	
− 5 billes	1 ensemble
5 billes	
− 5 billes	1 ensemble
0 bille	4 ensembles

ou encore:

$$
\begin{array}{r|l}
20 & 5 \\ \cline{2-2}
-\ 5 & 1 \\ \hline
15 & \\
-\ 5 & 1 \\ \hline
10 & \\
-\ 5 & 1 \\ \hline
5 & \\
-\ 5 & 1 \\ \hline
0 & 4
\end{array}
$$

On a donc 4 ensembles de 5 billes ou: $4 \times 5 = 20$
Si, d'autre part, l'on veut partager ces mêmes 20 billes entre 5 enfants, on est obligé d'utiliser un subterfuge, c'est-à-dire qu'on distribue d'abord une bille à chaque enfant, soit un ensemble de 5 billes, puis un deuxième ensemble, un troisième jusqu'à épuisement des billes. (Voir figure 5.3)

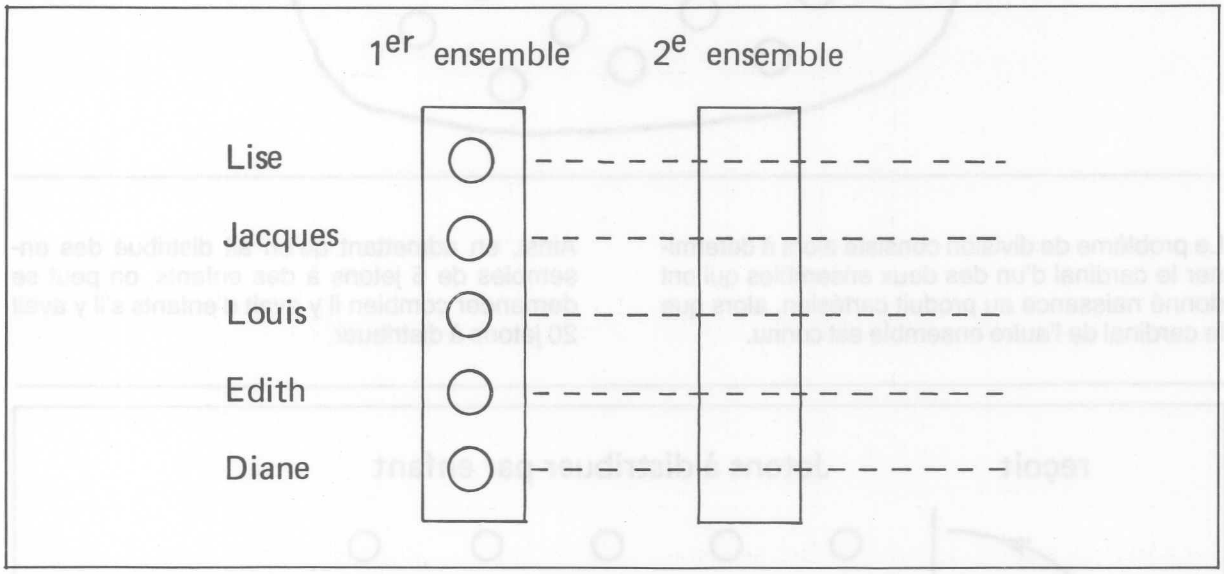


FIGURE 5.3

Tout naturellement, l'enfant en vient à constater que les billes du premier ensemble, plus les 5 billes du deuxième ensemble, etc. lui donne par addition successive les 20 billes de départ, c'est-à-dire $5 \times \square = 20$. Ce rapprochement entre la multiplication et la division, l'amène à retrancher des multiples de 5 plutôt que de faire des soustractions successives de ce même nombre:

ou

$$
\begin{array}{r|l}
20 & 5 \\ \cline{2-2}
-\ 10 & 2 \\ \hline
10 & \\
-\ 10 & 2 \\ \hline
0 & 4
\end{array}
$$

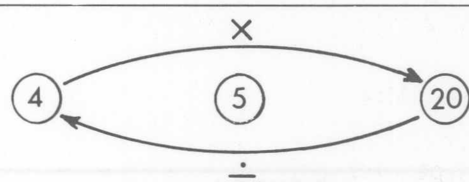
ou

$$
\begin{array}{r|l}
20 & 5 \\ \cline{2-2}
-\ 15 & 3 \\ \hline
5 & \\
-\ 5 & 1 \\ \hline
0 & 4
\end{array}
$$

ou

$$
\begin{array}{r|l}
20 & 5 \\ \cline{2-2}
-\ 20 & 4 \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

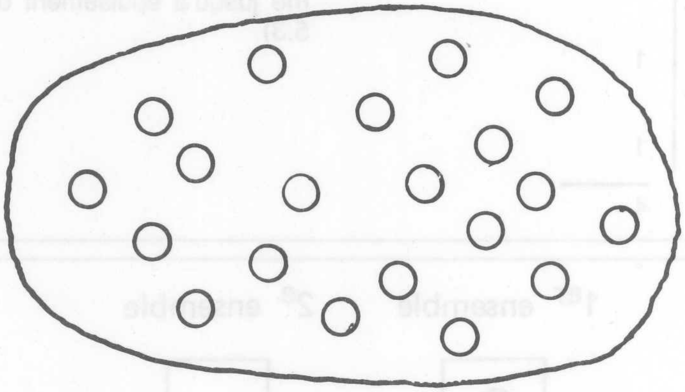
La division "défait" ce que "fait" la multiplication:



Ainsi, l'enfant peut se rendre compte que si $20 \div 5 = 4$, c'est parce que $4 \times 5 = 20$. On peut se rendre compte ainsi que, dans une certaine mesure, ces deux opérations peuvent s'enseigner concurremment.

5.4 Division et produit cartésien

On peut encore considérer un ensemble de 20 jetons comme le cardinal du produit cartésien de deux ensembles.



Le problème de division consiste alors à déterminer le cardinal d'un des deux ensembles qui ont donné naissance au produit cartésien, alors que le cardinal de l'autre ensemble est connu.

Ainsi, en admettant qu'on ait distribué des ensembles de 5 jetons à des enfants, on peut se demander combien il y avait d'enfants s'il y avait 20 jetons à distribuer.

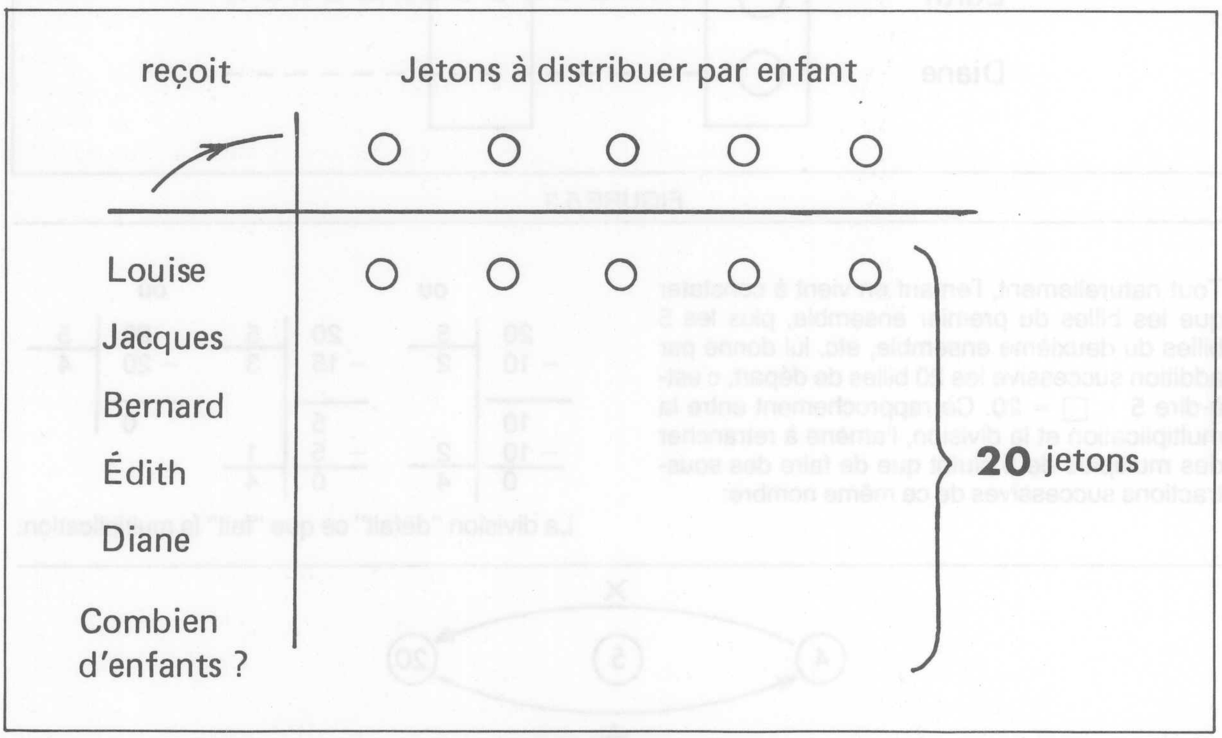


FIGURE 5.4.1

On aurait pu tout aussi bien connaître le nombre d'enfants à qui on a distribué des jetons et chercher le nombre de jetons que chaque enfant a reçu:

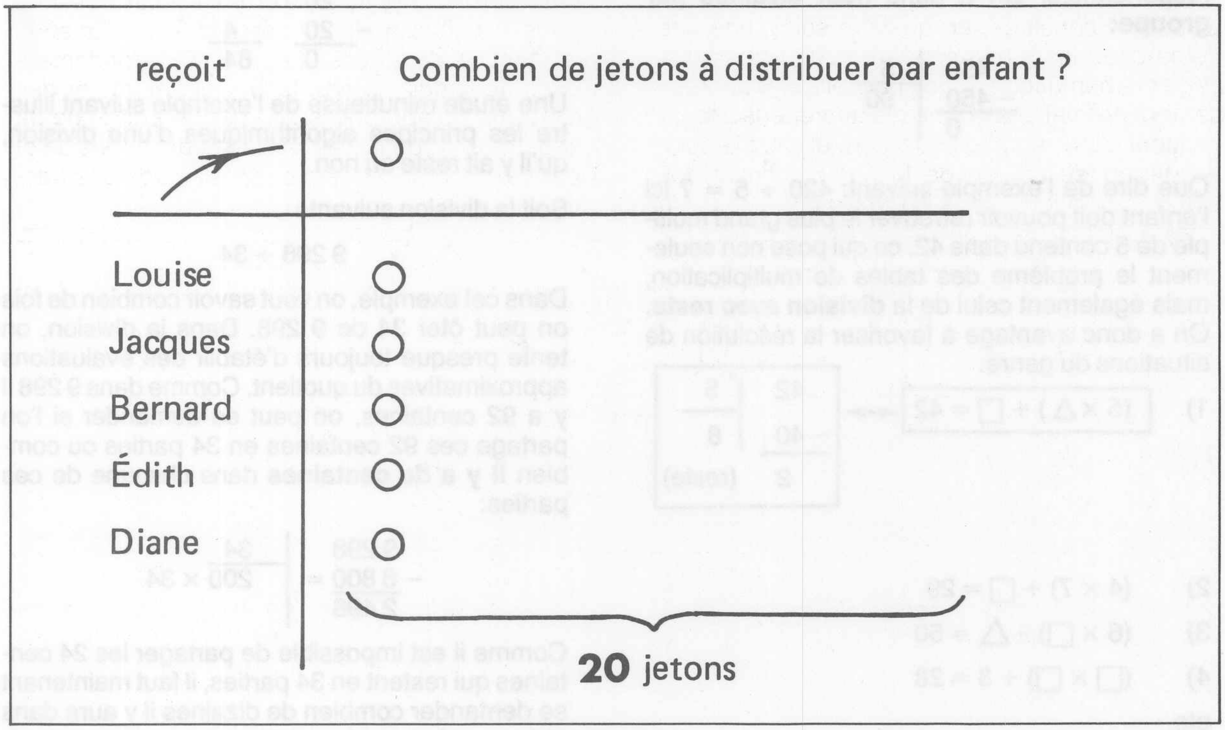


FIGURE 5.4.2

Dans chacun de ces deux cas, on recherche un cardinal d'ensemble, donc un nombre. On se rend compte qu'ici on se rapproche davantage du concept mathématique, créant ainsi une situation qui peut favoriser, dans une certaine mesure, les approches pédagogiques en vue de l'apprentissage d'un algorithme.

5.5 L'algorithme de la division

L'apprentissage d'un algorithme de division est sans doute l'un des processus les plus lents et les plus difficiles. En effet, pour en arriver à une certaine maîtrise de la division, de nombreuses habiletés et connaissances préalables sont requises, habiletés et connaissances qu'il faut pouvoir coordonner facilement en vue d'un résultat valable. L'enfant, en effet, doit bien connaître les propriétés de la numération positionnelle. Il devra maîtriser les combinaisons fondamentales de la soustraction (donc de l'addition) et de la multiplication. L'habileté à manipuler les facteurs et les multiples de même que certaines règles de divisibilité viennent renforcer cette maîtrise. Enfin, il doit être capable d'évaluer approximativement des produits du genre 7 × 600 pour vérifier si ce produit est contenu ou non dans un nombre comme 4 308.

$$\begin{array}{r|l} 4\,308 & 600 \\ \hline ? & 7 \end{array}$$

Il n'est donc pas étonnant que l'enfant éprouve de la difficulté dans l'étude de cette opération, ce qui peut facilement devenir un obstacle insurmontable dans son apprentissage de la mathématique.

Il faut donc insister sur certaines habiletés fondamentales, ne pas exiger peut-être le même rythme d'apprentissage de tous les élèves, mais les amener graduellement et sûrement à une certaine maîtrise de cette opération.

Dans des cas comme $450 \div 5 = \square$ ou $5 \times \square = 450$, s'il apparaît que la connaissance des combinaisons fondamentales de la multiplication devient indispensable, la maîtrise de la numération positionnelle ne l'est pas moins. Comme on ne peut partager les quatre centaines en cinq, force nous sera de partager les quarante-cinq dizaines correspondantes. On a donc **neuf dizaines par groupe:**

$$\begin{array}{r|l} 450 & 5 \\ \underline{-\,450} & 90 \\ 0 & \end{array}$$

Que dire de l'exemple suivant: $420 \div 5 = ?$ Ici l'enfant doit pouvoir retrouver le plus grand multiple de 5 contenu dans 42, ce qui pose non seulement le problème des tables de multiplication, mais également celui de la **division avec reste.** On a donc avantage à favoriser la résolution de situations du genre:

1) $\boxed{(5 \times \triangle) + \square = 42} \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{r|l} 42 & 5 \\ \underline{-\,40} & 8 \\ 2 & \text{(reste)} \end{array}}$

2) $(4 \times 7) + \square = 29$

3) $(6 \times \square) + \triangle = 50$

4) $(\square \times \square) + 3 = 28$

etc.

Une division comme celle-ci: $420 \div 5 = \square$ devient donc possible.

$$\begin{array}{r|l} 420 & 5 \\ \underline{-\,400} & 80 \\ 20 & \\ \underline{-\,20} & \underline{\ \ 4} \\ 0 & 84 \end{array}$$

Une étude minutieuse de l'exemple suivant illustre les principes algorithmiques d'une division, qu'il y ait reste ou non.

Soit la division suivante:

$$9\,298 \div 34$$

Dans cet exemple, on veut savoir combien de fois on peut ôter 34 de 9 298. Dans la division, on tente presque toujours d'établir des évaluations approximatives du quotient. Comme dans 9 298 il y a 92 centaines, on peut se demander si l'on partage ces 92 centaines en 34 parties ou combien **il y a de centaines** dans chacune de ces parties:

$$\begin{array}{r|l} 9\,298 & 34 \\ \underline{-\,6\,800} = & 200 \times 34 \\ 2\,498 & \end{array}$$

Comme il est impossible de partager les 24 centaines qui restent en 34 parties, il faut maintenant se demander combien de dizaines il y aura dans chacune des parties si l'on partage les 249 dizaines qui restent entre ces mêmes 34 parties:

$$\begin{array}{rc|l} 9\,298 & & 34 \\ -\ 6\,800 & = & 200 \times 34 \\ \hline 2\,498 & & \\ -\ 2\,380 & = & 70 \times 34 \\ \hline 118 & & \\ -\ 102 & = & 3 \times 34 \\ \hline 16 & \text{(reste)} & \end{array}$$

FIGURE 5.5.1

On a retranché en tout $(200 \times 34) + (70 + 34) + (3 \times 34)$ ou 273×34. Comme il reste 16 unités non partagées, on peut écrire:

$$9\,298 = (273 \times 34) + 16$$

La division explicitée dans la figure 5.5.1 met bien en évidence les principes sur lesquels elle repose. On peut toutefois en s'implifier la présentation comme suit:

9 298		34
− 6 800		200
2 498	+	70
− 2 380		ou 273
118	+	
− 102		3
16		(reste)

FIGURE 5.5.2

ou encore comme suit:

9 298	34
− 2 800	273
2 498	
− 2 380	
118	
− 102	
16	(reste)

FIGURE 5.5.3

5.6 Division sans reste et division avec reste

Si la soustraction peut se définir dans l'ensemble des nombres naturels comme inverse d'une addition dans ce même ensemble, peut-on en dire autant de la division par rapport à la multiplication? Oui, dans le cas d'une division exacte (sans reste, "qui arrive juste..."). Toutefois, si dans le passé, le besoin de créer un ensemble qui soit fermé pour la soustraction ne s'est pas révélé indispensable pour la résolution de problèmes dans les classes primaires, on ne peut en dire autant pour la division. (Voir 1.4 et l'introduction du présent chapitre).

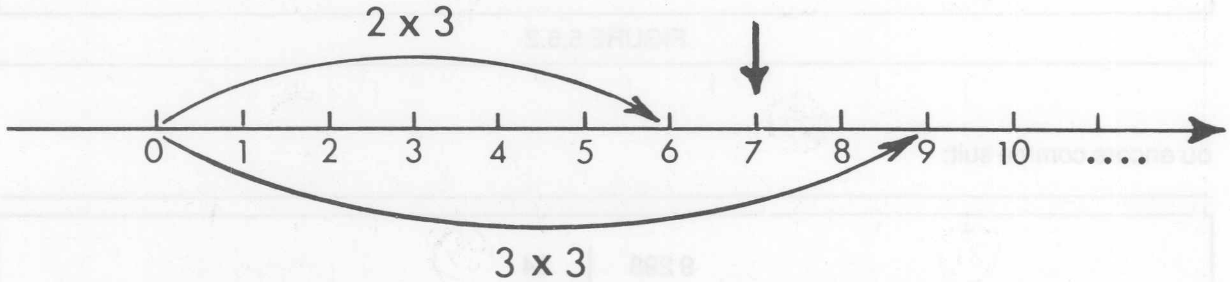
De nombreux problèmes de numération, de regroupement, de mesure de partage, de proportion et même d'arithmétique modulaire, mettent l'enfant devant des situations que celui-ci ne peut résoudre sans avoir recours au moins intuitivement à des divisions dont la réponse est loin de toujours faire appel à un nombre entier de fois. Aussi est-il nécessaire d'introduire l'ensemble des fractions au primaire, même si cette nécessité ne constitue pas l'unique argument de cette introduction (voir fascicule E sur les fractions).

Très tôt, l'enfant peut et doit envisager des situations qui supposent des divisions avec reste. L'apprentissage même de l'algorithme de division est à ce prix. Ainsi, dans la division de 312 par 8, il s'agit de partager 31 dizaines en 8 parties. On a donc 8 groupes de 3 dizaines et il **reste** 7 dizaines, etc. Des situations comme celles-ci sont nombreuses dans la pratique de la division.

Soit la division suivante: $7 \div 3$.
Les multiples de 3 étant 0, 3, 6, 9, 12 . . .
Il est clair que 7 se situe entre 6 et 9 ou encore entre 3×2 et 3×3:

$$(3 \times 2) \leq 7 < (3 \times 3)$$

ce qu'on pourrait illustrer par:



La division $7 \div 3$ pourrait donc s'écrire:
$7 = (3 \times \square) + \Delta$, (ou d'une manière plus générale, $a = bq + r$, où "a" est le dividende "b" le diviseur, "q" le quotient et "r", le reste). C'est l'algorithme d'Euclide pour la division.

L'utilisation de la calculatrice, pour les divisions avec reste, pose un certain problème d'ordre pédagogique. Dans ce cas, comme la calculatrice est généralement programmée pour donner les résultats de divisions en notation décimale, on contourne la difficulté en utilisant l'approche exposée au paragraphe précédent pour l'algorithme d'Euclide. On cherche donc, à l'aide de la machine, à déterminer le plus grand multiple d'un diviseur qui soit immédiatement inférieur à un dividende donné et à exprimer le reste sous forme de différence à combler pour obtenir ce même dividende. Ainsi, dans la division de 567 par 34, on peut se rendre compte que 16×34 ou 544 est le plus grand multiple de 34 contenu dans 567 et que la différence entre ce nombre et 544, c'est-à-dire 23 constitue le reste de cette division de 567 par 34.

5.7 Facteurs et multiples

Dans les chapitres sur l'addition et la multiplication, il a déjà été fait mention de grilles de nombres, de tables de multiplication et de multiples de nombres.

Le crible d'Ératosthène constitue un moyen original de trouver les **nombres premiers** par mise de côté des nombres composés. Pour ce faire, le modèle décrit en 2.10 peut être fort utile (voir illustration: figure 5.7.1)

Après avoir disposé les cent premiers nombres sur le tableau, l'enfant enlève d'abord le nombre 1. Il laisse ensuite le nombre 2 et enlève tous les multiples de ce nombre. Il fait de même pour le nombre 3. Le nombre 4 étant déjà retiré, il répète le procédé pour le nombre 5. Le nombre 6 étant également retiré, il laisse le nombre 7 et enlève de nouveau tous les multiples de ce nombre. Il s'aperçoit enfin, après cette dernière opération, qu'il ne peut plus retirer de nombres et que les nombres restants sont des nombres premiers, c'est-à-dire qu'ils ne sont les multiples d'aucun autre nombre.

Crible d'Ératosthène

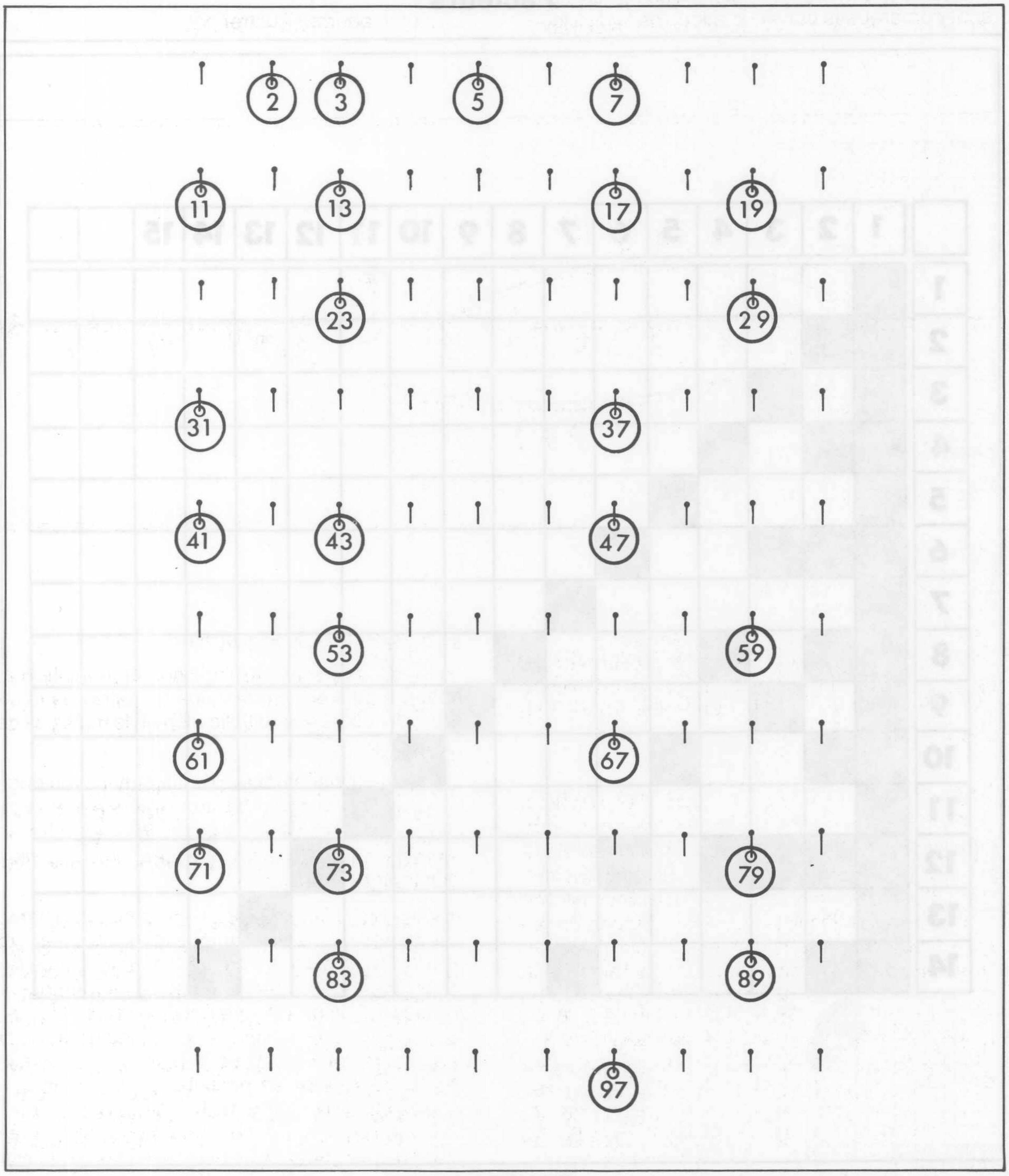


FIGURE 5.7.1

Il existe un grand nombre de procédés, de modèles et d'illustrations pour amorcer et même approfondir l'étude des facteurs et des multiples de nombres.

En voici un exemple sous forme de grille:

Facteurs

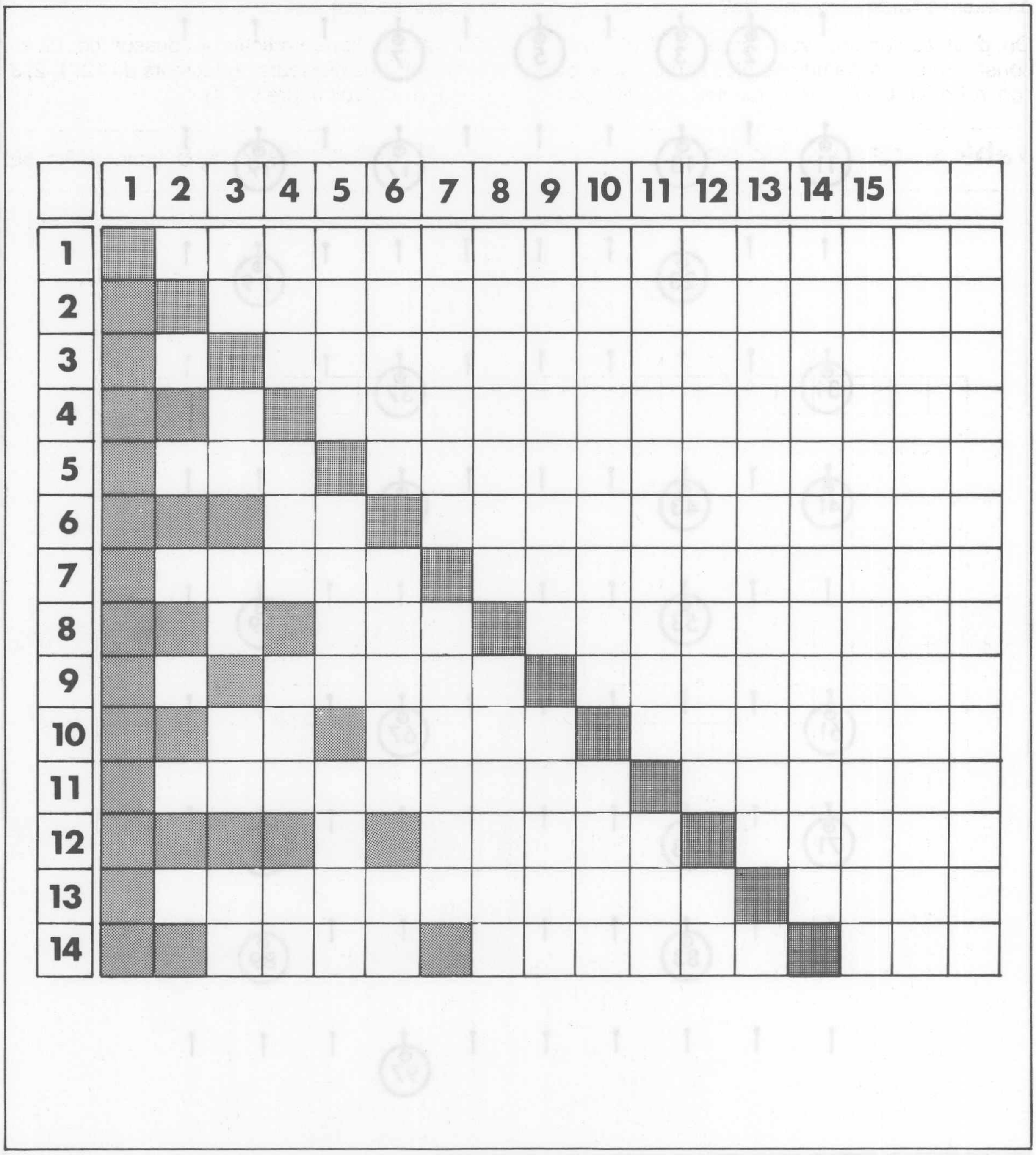


FIGURE 5.7.2

On peut ici se servir de cubes et les disposer sur la grille. On remarque que les nombres sont placés à gauche et que vis-à-vis de chacun de ces nombres, les carrés en foncé représentent les facteurs de ces nombres. **Exemple:** Sur la ligne du nombre "6", on trouve les **facteurs** ou **diviseurs** 1, 2, 3 et 6. Peut-on trouver des nombres premiers à l'aide de cette grille?

On peut également (voir figure 5.7.3 et 5.7.4) construire une grille un peu plus sophistiquée où l'on retrouve, dans les verticales, les diviseurs d'un nombre et, dans les horizontales, leurs multiples.

Exemples:

1. Dans la ligne horizontale vis-à-vis de 6, on trouve les multiples de 6: 6, 12 et 18 (voir figure 5.7.3).
2. Dans la ligne verticale au-dessus de 12, on trouve les diviseurs ou facteurs de 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12 (voir figure 5.7.4).

Tableau des multiples **P.P.C.M. de 2, 3, 6** (voir 5.8.4 p. 55)

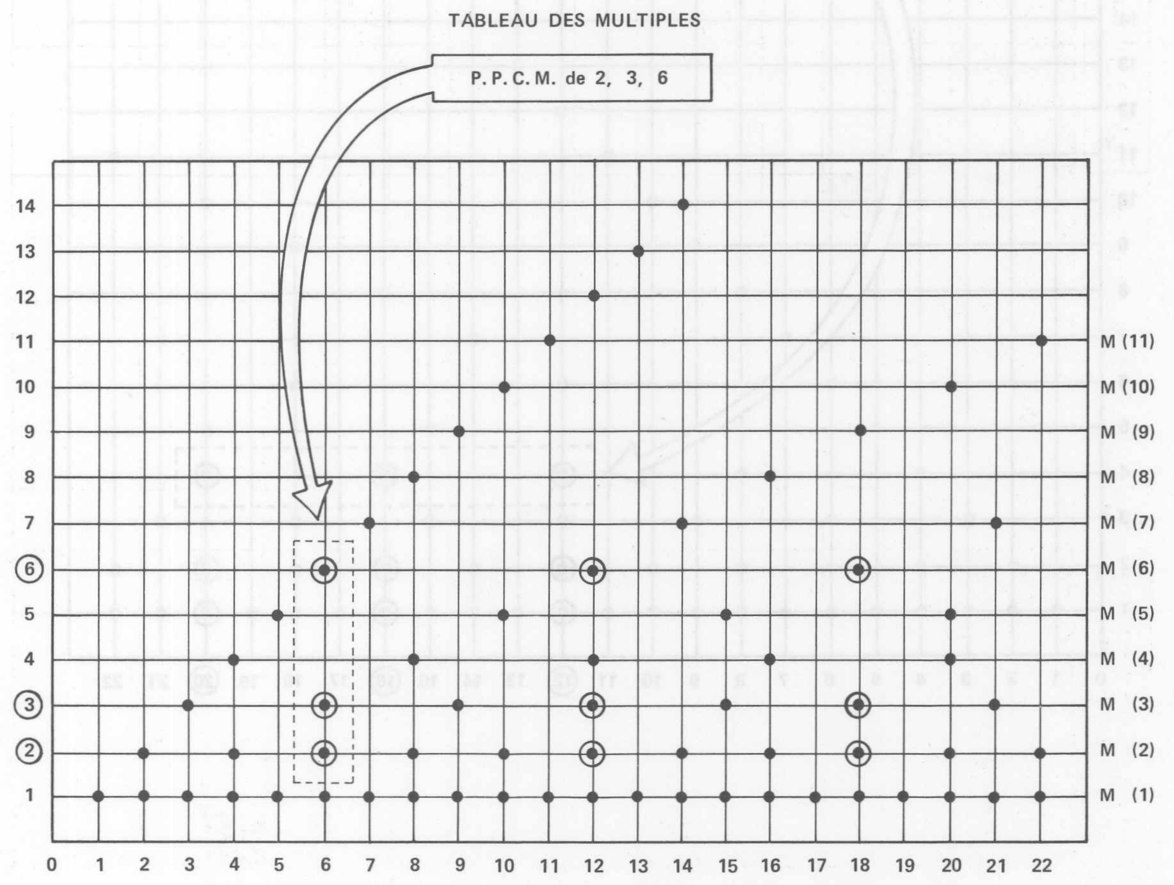


FIGURE 5.7.3

Tableau des diviseurs

P.G.C.D. de 12, 16, 20 (voir 5.9.3 p. 55)

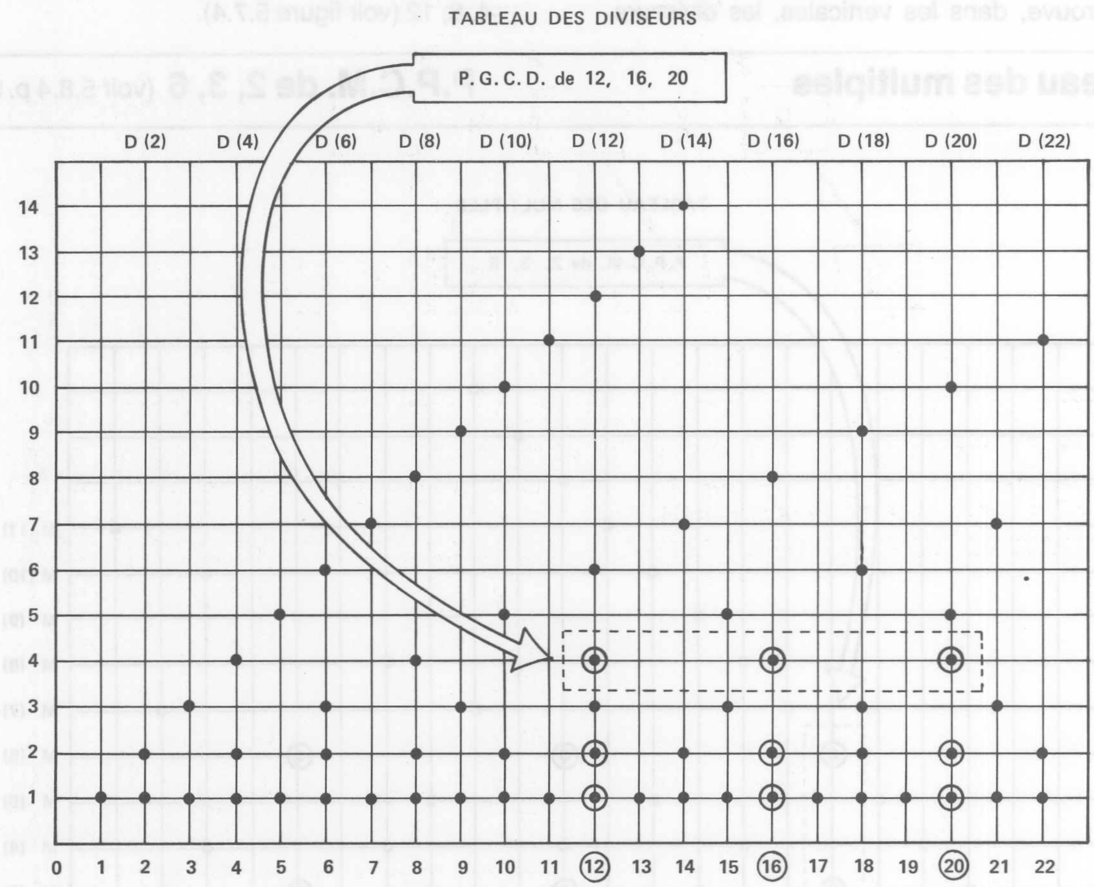


FIGURE 5.7.4

L'"arbre" des facteurs de 24

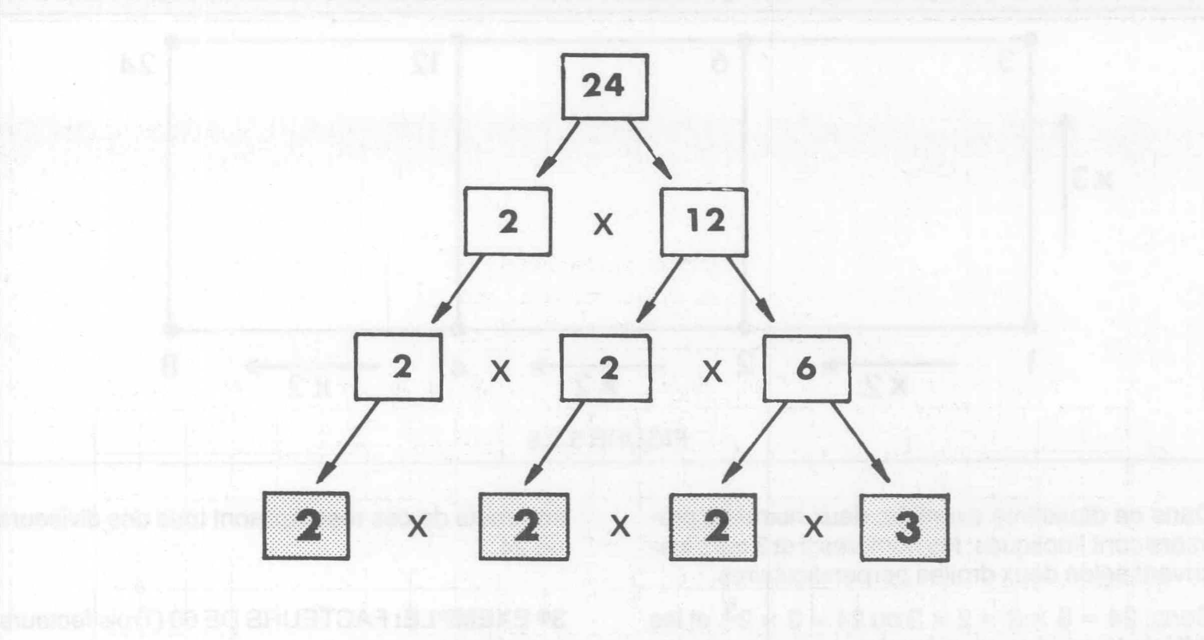


FIGURE 5.7.5

Cette présentation d'"arbre" n'est pas autre chose qu'une façon imagée de représenter le tableau qu'on avait l'habitude d'utiliser autrefois:

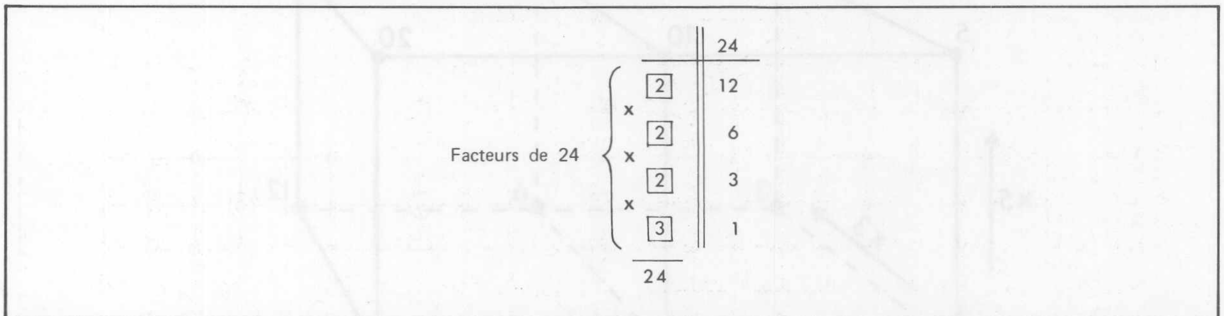


FIGURE 5.7.6

On peut encore, à l'occasion, utiliser des représentations à une, deux ou trois dimensions, suivant qu'on retrouve dans les facteurs un, deux ou trois nombres premiers.

1er EXEMPLE: FACTEURS DE 27. (Un seul facteur premier)

$27 = 3 \times 3 \times 3$
ou $27 = 3^3$

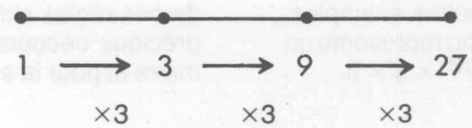


FIGURE 5.7.7

Chacun des points de cette droite représente un diviseur de 27.

2e EXEMPLE: FACTEURS DE 24 (Deux facteurs premiers)

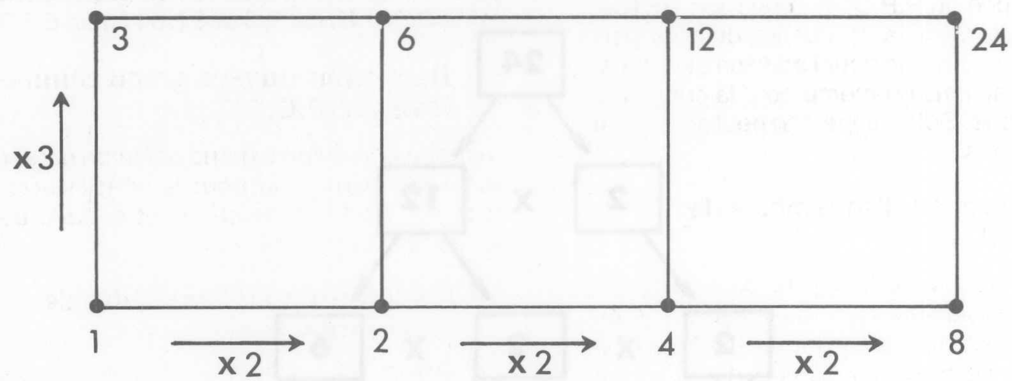


FIGURE 5.7.8

Dans ce deuxième exemple, deux nombres premiers sont impliqués: les nombres 2 et 3 qui s'inscrivent selon deux droites perpendiculaires.

Donc, $24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2$ ou $24 = 3 \times 2^3$, et les différents nombres qu'on retrouve à chacun des sommets de ces réseaux sont tous des diviseurs de 24.

3e EXEMPLE: FACTEURS DE 60 (Trois facteurs premiers)

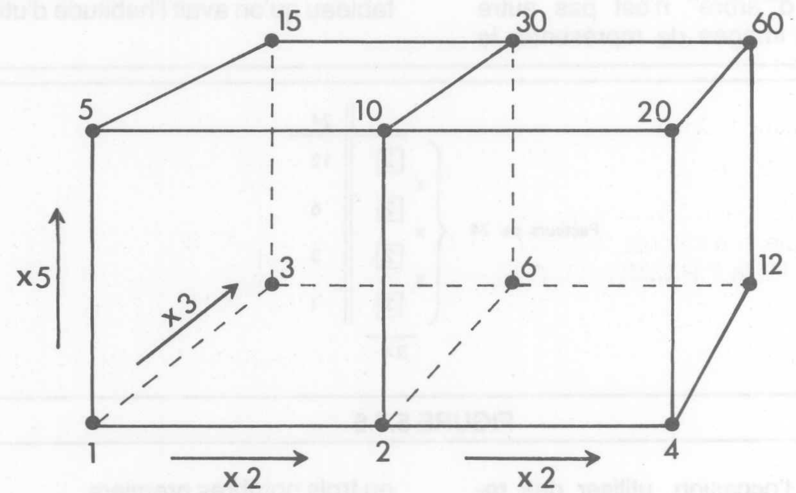


FIGURE 5.7.9

Dans ce dernier exemple, trois nombres premiers sont impliqués comme diviseurs, ce qui explique l'utilisation de trois droites perpendiculaires l'une à l'autre. Ici, comme dans les autres exemples, chacun des sommets de ce réseau représente un diviseur de 60. On a donc $60 = 2^2 \times 3 \times 5$.

Dans l'étude des facteurs, on ne saurait passer sous silence l'étude des règles de divisibilité par 2, 3, 5, 9 et 10. L'étude ou plutôt, la connaissance de ces règles simples et fondamentales est d'un précieux secours pour la mise en facteurs premiers et pour la simplification des fractions.

5.8 Recherche du plus petit commun multiple (P.P.C.M.)

Cette recherche du P.P.C.M. trouve son application principale dans la recherche du plus petit dénominateur commun pour l'addition et la soustraction de fractions ou même pour la comparaison de fractions. Cette recherche peut se faire de plusieurs façons.

5.8.1 Intersection d'ensembles de multiples

EXEMPLE: Trouver le P.P.C.M. de 6 et 8. On détermine l'ensemble des multiples de 6 de même que celui des multiples de 8. On en fait l'intersection. Le plus petit élément de ce nouvel ensemble constitue le P.P.C.M. de 6 et 8.

$$M(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, \ldots\}$$
$$M(8) = \{8, 16, 24, 32, 40, \ldots\}$$
$$M(6) \cap M(8) = \{24, 48, \ldots\}$$

Le P.P.C.M. est 24.

5.8.2 L'ensemble des multiples communs à plusieurs nombres

EXEMPLE: Trouver le P.P.C.M. de 3, 4 et 6

Ici, il s'agit de déterminer l'ensemble des multiples du plus grand de ces trois nombres, c'est-à-dire, l'ensemble des multiples de 6.

$$M(6) = \{6, 12, 18, \ldots\}$$

On cherche alors le plus petit élément de cet ensemble qui soit divisible à la fois par 3, 4 et 6. Puisque cet élément est 12, **le P.P.C.M. de 3, 4 et 6 est 12.**

5.8.3 Autre algorithme

Même exemple qu'en 5.8.2

	3	4	6
2		2	3
X			
2		1	
X			
3	1		1
P.P.C.M.: $\boxed{12}$			

5.8.4 Utilisation du tableau de la figure 5.7.3

EXEMPLE: Recherche du P.P.C.M. de 2, 3 et 6.

On cherche, dans le tableau de la figure 5.7.3, une ligne verticale qui comprend à la fois des multiples de 2, 3 et 6. Comme la ligne verticale 6 est la première, quand on lit le tableau de la gauche vers la droite, qui remplit ces exigences, **6 est le P.P.C.M. de 2, 3 et 6** (voir figure 5.7.3).

5.9 Recherche du plus grand commun diviseur (P.G.C.D.)

La recherche du plus grand commun diviseur est particulièrement utile pour la simplification des fractions. Cette recherche peut se faire de plusieurs façons.

5.9.1 Intersection d'ensembles de diviseurs

EXEMPLE: Recherche du P.G.C.D. de 18 et 24. On trouve l'ensemble des diviseurs de 18 de même que l'ensemble des diviseurs de 24. On en fait l'intersection. Le plus grand élément de ce nouvel ensemble est le P.G.C.D. de 18 et 24.

$$D(24) = \{24, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1\}$$
$$D(18) = \{18, 9, 6, 3, 2, 1\}$$
$$D(24) \cap D(18) = \{6, 3, 2, 1\}$$

Donc, le P.G.C.D. est 6.

5.9.2 Autre algorithme

(Même exemple qu'en 5.9.1)
Recherche du P.G.C.D. de 24 et 18.

	24	18
2	12	9
X		
3	4	3
P.G.C.D.: 6		

5.9.3 Utilisation du tableau de la figure 5.7.4

Trouver le P.G.C.D. de 12, 16 et 20.

On cherche dans ce tableau, la ligne horizontale la plus élevée, qui pour les nombres 12, 16 et 20 présente des multiples d'un même nombre. Comme la ligne horizontale 4 est la plus élevée à remplir ces exigences, **4 est le P.G.C.D. de 12, 16 et 20.**

5.10 Division et arithmétique modulaire

Si l'arithmétique modulaire ne peut et ne doit pas faire l'objet d'un enseignement systématique au primaire, on ne peut quand même pas mettre de côté certains problèmes de type cyclique ou périodique. Ainsi, des questions comme celles-ci sont nettement du ressort de l'enseignement primaire; "Quelle heure sera-t-il dans 10, 20, 40 ou 50 heures? - Quel jour de la semaine ce sera dans 5, 9, 14 ou 20 jours? - Quel mois ce sera dans 17 mois?"

Sans doute, la division euclidienne est-elle une bonne façon de résoudre ces problèmes, mais l'utilisation de certains diagrammes peut aussi apporter une aide précieuse à l'analyse de ces mêmes problèmes.

C'est auourd'hui mercredi; on cherche à déterminer quel jour de la semaine ce sera dans 12, 19 ou 25 jours.

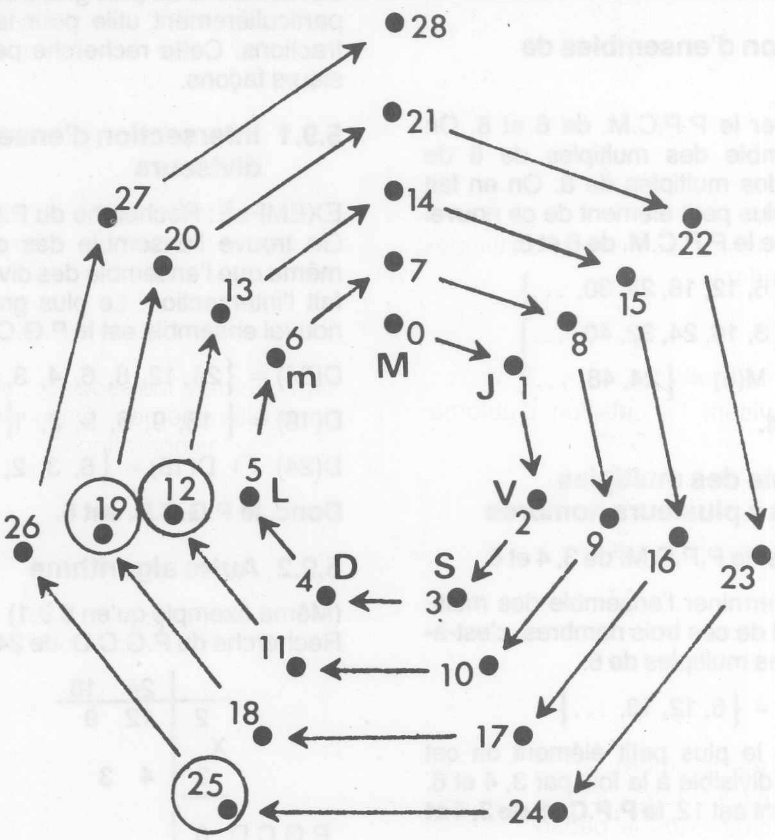


FIGURE 5.10

Dans 12 jours et dans 19 jours ce sera lundi et dans 25 jours, ce sera dimanche (voir aussi le fascicule sur les mesures).

5.11 Problèmes utilisant la division

Outre les problèmes de mesure et de partage mentionnés au début de ce chapitre et qui constituent, au primaire, le domaine principal d'utilisation de la division, il faut souligner le caractère fondamental que présente cette opération pour l'étude des rapports et proportions et celle des fractions (voir le fascicule E sur les fractions).

Les difficultés de langage ne doivent pas non plus être minimisées. Des expressions comme celles-ci:

combien de fois . . . ?
combien de fois moins ?
combien de fois plus ?

induisent souvent les enfants à traduire certaines situations de division, en termes d'addition, de soustraction ou de multiplication. Il faut donc apporter un soin particulier à l'usage et à l'interprétation du langage.

CHAPITRE 6

Le calcul mental

6.1 Introduction

Quand on cherche à cerner les objectifs de l'enseignement au primaire, on les regroupe généralement sous les principaux points suivants:

A. objectifs d'acquisition de connaissances;

B. objectifs qui visent le développement de la réflexion et de la créativité chez l'enfant;

C. objectifs qui visent l'acquisition d'attitudes d'ordre socio-affectif;

D. objectifs d'ordre psychomoteur;

E. objectifs qui visent l'acquisition d'habiletés;

F. objectifs qui visent l'acquisition d'automatismes.

Toutes ces catégories d'objectifs ont leur importance. On ne peut en négliger aucune. Et si l'on a pu dire que, dans le passé, les objectifs de réflexion et de créativité ou ceux d'ordre socio-affectif ont pu être mis de côté, il n'en est plus ainsi aujourd'hui. Le soin qu'on a apporté à remédier à cette lacune de l'enseignement a peut-être rejeté partiellement dans l'ombre l'acquisition des habiletés et des automatismes.

L'enseignement des mathématiques n'a pas échappé aux nouvelles tendances. Dans l'ensemble, on peut croire que la pédagogie étant essentiellement engagée dans un processus évolutif, on peut se poser des questions quant à l'orientation de cette même évolution. Le calcul en général, et le calcul mental en particulier, sont-ils en régression? Doit-on s'y appliquer davantage ou en fait-on déjà trop? La résolution de problèmes oraux a-t-elle encore sa place dans l'enseignement des mathématiques? Que faut-il penser de l'apprentissage des tables de calcul? Les réponses à ces questions ou à d'autres de même type ne sont pas évidentes. Il serait sans doute fort intéressant de réfléchir un peu sur le problème, d'examiner en quels termes il se pose et tenter d'y apporter des solutions.

6.2 Réflexions sur le calcul

Il faut bien reconnaître ici que la simple mémorisation des combinaisons fondamentales de calcul n'a rien de bien enrichissant en soi pour l'enfant. Il est donc vivement souhaitable que l'enfant puisse se servir des combinaisons apprises en les utilisant dans le calcul mental, les approximations et les problèmes oraux. Il importe également que l'apprentissage même de ces combinaisons puisse se faire dans une démarche de découverte aussi bien de ces combinaisons que des propriétés des opérations en question.

L'étude des propriétés des opérations en effet est pratiquement indissociable de l'étude des opérations elles-mêmes. On ne peut prétendre à la maîtrise des opérations sans une bonne connaissance, au moins intuitive, de leurs propriétés.

6.2.1 Calcul mental et propriétés des opérations.

Soient les exemples suivants:

1. $\begin{array}{r} 4 \\ \times\ 1700 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1700 \\ \times\ \ \ 4 \\ \hline \end{array}$ (commutativité)

L'utilisation des propriétés des opérations permet souvent d'effectuer mentalement certaines opérations ou même de simplifier le calcul écrit:

2. $78 \times 4 = (80 \times 4) - (2 \times 4)$ (distributivité)
3. $75 + 33 + 25 = (75 + 25) + 33$ (commutativité et associativité)

En mettant les enfants devant des situations de ce genre, ceux-ci apprennent très facilement à connaître les propriétés des opérations sans qu'il soit question, cependant, de les obliger à reconnaître ces propriétés ou à les nommer.

On pourrait multiplier ces exemples d'exercices où l'enfant, grâce au calcul mental, se voit en quelque sorte contraint d'utiliser l'une ou l'autre de ces propriétés.

---

4. $69 \times 3 = (70 \times 3) - 3$
5. $24 \times 7 = (25 \times 7) - 7$
6. $75 + 125 = (75 + 25) + 100$
7. $27 + 53 = (27 + 3) + 50$
8. $27 + \square = 100$
9. $27 + 33 = 30 + 30$
10. $407 - 98 = 409 - 100$
11. $6611 - 6596 = 6615 - 6600$
12. $7003 - 6988 = 7015 - 7000$

Type de calcul qu'on retrouve dans la remise de la monnaie.

Artifice de calcul qui utilise une certaine forme de question.

Évidemment, il y a plusieurs procédés ou façons de résoudre ces situations. En laissant à l'enfant le soin de choisir l'un ou l'autre de ces procédés, on lui fournit l'occasion de multiplier les façons d'appliquer les propriétés des opérations. Les enfants peuvent facilement en découvrir par eux-mêmes. Ils aiment bien ces "jeux" qui font appel à leur imagination et leur permettent souvent d'observer des "régularités" à travers certains types d'opérations ou de suites de nombres.

6.2.2 Calcul mental et "régularités"

Le processus à emprunter en vue de la découverte d'une "régularité" s'apparente assez bien au processus de formation et d'élaboration d'un concept en ce sens que, dans un cas comme dans l'autre, on se sert de quelques éléments peu nombreux pour aboutir à des généralisations capables de couvrir des ensembles beaucoup plus vastes.

Le problème consiste plus souvent qu'autrement à continuer des séries déjà commencées de nombres ou d'équations.

En voici quelques exemples:

6.2.2.1 Séries d'additions

a) $9 + 7 = 16$
$19 + 7 = 26$
$29 + 7 = 36$
. . .

On ajoute 10, 20, 30, . . ., à 7 et on retranche 1 au résultat obtenu.

b) $8 + 7 = 15$; $18 + 7 = 25$; $28 + 7 = 35$; . . .

6.2.2.2 Multiplication par 11

La multiplication par 11 également intéresse beaucoup les enfants: $2 \times 11 = 22$, $3 \times 11 = 33$, $4 \times 11 = 44$, . . .; $17 \times 11 = 1\ 8\ 7$, $23 \times 11 = 2\ 5\ 3$, $42 \times 11 = 4\ 6\ 2$, . . . (on additionne les chiffres du multiplicande et on insère la somme entre ces deux mêmes chiffres); dans les cas où la somme obtenue dépasse 10, on ajoute la retenue au chiffre de gauche: $58 \times 11 = 6\ 3\ 8$.

Et si le nombre qu'on veut multiplier par 11 avait plus de deux chiffres (ex.: $3\,472 \times 11$), comment procéderait-on?

6.2.2.3 Carrés des nombres terminés par 5

Les carrés des nombres terminés par 5, fournissent un autre exemple de "régularités" des plus intéressants

5	15	25	35	45	55	65
× 5	× 15	× 25	× 35	× 45	× 55	× 65
25	225	625	1225	....	....	....
$\boxed{1 \times 0}$	$\boxed{2 \times 1}$	$\boxed{3 \times 2}$	$\boxed{4 \times 3}$			

Observation:

1. Les deux derniers chiffres du produit sont toujours **25.**
2. Les chiffres précédant **25** sont formés par le produit du nombre à gauche du chiffre 5 dans le nombre à élever au carré par le nombre qui lui est supérieur de 1.

6.2.2.4 Séries de multiplications

1. 37 × 3 = 111
   37 × 6 = 222
   37 x ? = ?
   ....
2. 77 × 13 = 1001
   77 × 26 = 2002
   77 × ? = ?
   ....

6.2.2.5 Suites de nombres

1. **Suite de Fibonacci**
   1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
2. **Suite de nombres triangulaires**

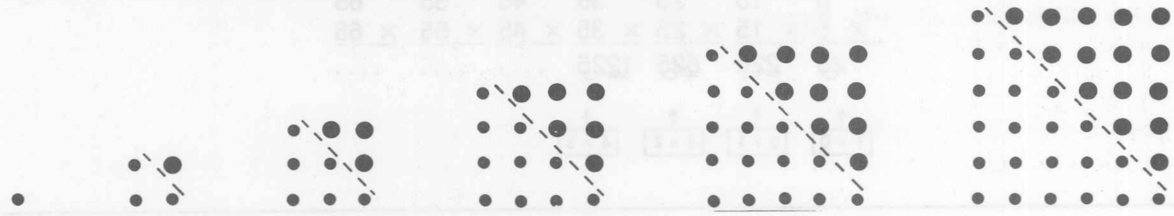
+2 +3 +4 +5 +6

1 → 3 → 6 → 10 → 15 → 21

(1) (1 + 2) (1 + 2 + 3) (1 + 2 + 3 + 4) (1 + 2 + 3 + 4 + 5) (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)

Que donne la somme de deux nombres triangulaires consécutifs? (Voir exemple suivant)

3. Suite de nombres carrés



1	4	9	16	25	36
(1^2)	(2^2)	(3^2)	(4^2)	(5^2)	(6^2)

6.2.3 Calcul mental et numération

Il existe de nombreux exercices de calcul mental propres à renforcer la maîtrise et la connaissance de notre système de numération.

Exemples:

a) addition de dizaines, de centaines, de milliers:

$$38 + 40$$
$$131 + 60$$
$$428 + 300$$
$$3\,547 + 1\,000$$

b) soustraction de dizaines, de centaines, de milliers:

$$82 - 40$$
$$152 - 70$$
$$497 - 200$$
$$5\,236 - 3\,000$$

c) soustration ou addition successive d'unités et de dizaines:

1) $82 - 44 = (82 - 4) - 40$
ou
$= (82 - 40) - 4$
ou
$= (82 - 42) - 2$

2) $27 + 35 = (27 + 30) + 5$
ou
$= (27 + 5) + 30$
ou
$= (27 + 3) + 32$

d) multiplication par 10, 100, 1 000, 10 000:

voir figure 4.5.3 p. 36.

e) multiplication par 25:

$8 \times 25 = 8 \times \boxed{\frac{100}{4}}$
ou
$= (4 \times 25) + (4 \times 25)$

f) multiplication par 5, 20, 50:

1) $12 \times 5 = 12 \times \boxed{\frac{10}{2}}$

2) $15 \times 20 = (15 \times 2) \times 10$

3) $85 \times 20 = 85 \times \boxed{\frac{100}{5}}$

4) $126 \times 50 = 126 \times \boxed{\frac{100}{2}}$

g) division par 5, 20, 25, 50:

1) $\frac{480}{5} = \frac{480 \times 2}{10}$

2) $\frac{500}{20} = \frac{500 \times 5}{100}$

3) $\frac{700}{25} = \frac{700 \times 4}{100}$

4) $\frac{7\,500}{50} = \frac{7\,500 \times 2}{100}$

6.2.4 Maîtrise des habiletés de base

À mesure que l'enfant progresse dans l'étude de la mathématique, il doit s'ajuster constamment à la complexité grandissante d'une structure qui intègre certains éléments de base pour en élaborer d'autres beaucoup plus complexes. On ne saurait être à l'aise dans les techniques de soustraction et de multiplication par exemple, sans une certaine maîtrise de l'addition. Quant à la division, elle suppose, en plus de la maîtrise de l'addition, de la soustraction et de la multiplication, une très bonne connaissance de la numération ainsi que la facilité d'évaluer approximativement des produits qui peuvent être compris dans des nombres donnés. Enfin, le calcul des fractions se fonde sur un très grand nombre d'habiletés techniques qui vont de l'addition dans $\mathbb{N}$, aux règles de divisibilité par 2, 3, 5, 9, 10, 20, 25, 50 et 100, à la connaissance des multiples et des diviseurs d'un nombre, de même qu'au calcul du plus grand commun diviseur (P.G.C.D.) et du plus petit commun multiple (P.P.C.M.). S'agit-il, par exemple, de trouver les 25% de 16 ou les 3/4 de 24, on devra avoir recours à des nombres dans $\mathbb{N}$, pour pouvoir effectuer ces problèmes. D'ailleurs, à peu près dans toutes les opérations portant sur les fractions, on doit recourir à des habiletés fondamentales de calcul dans $\mathbb{N}$. Il n'est donc pas étonnant de constater que, chez les enfants, l'apprentissage de la division et celui des fractions constituent une source de difficultés considérables que de nombreux exercices de calcul oral auraient sans doute pu aplanir.

> Contrairement à une opinion assez répandue, il n'est pas nécessaire de consacrer beaucoup de temps à ce genre d'exercices. Une dizaine de minutes par jour devrait suffire pour obtenir les résultats escomptés, à condition bien entendu qu'on le fasse assidûment.

Il y aurait avantage également à encourager les enfants à varier leurs procédés de calcul. Ainsi, l'exemple 5 de la page 58 aurait pu se faire comme suit:

$$24 \times 7 = (20 + 4) \times 7 = (20 \times 7) + (4 \times 7).$$

de même pour l'exemple 10, page 58:

$$407 - 98 = (407 - 100) + 2.$$

et pour les exemples 2 et 4 de la page 60:

$$\frac{500}{20} = \frac{50}{2} = 25$$

$$\text{et } \frac{7\,500}{50} = \frac{750}{5} = 150$$

De plus, il ne faut pas négliger un facteur psychologique important, celui qui fait qu'un enfant qui a atteint une certaine maîtrise des habiletés fondamentales de calcul, jouit d'une plus grande assurance devant les situations mathématiques qu'on lui propose. Il peut ainsi concentrer davantage son attention sur un problème donné sans risquer une dispersion de ses énergies autour d'une foule de détails purement techniques. Cette confiance en soi fait qu'il aime davantage les mathématiques, qu'il peut plus facilement, par exemple, découvrir ou élaborer des "régularités" sur les nombres. Le champ de ses explorations mathématiques s'en trouve agrandi, lui permettant, du même coup, d'aborder des situations de problèmes plus nombreuses, plus complexes et plus intéressantes. Dans cette même perspective, on pourrait souhaiter une certaine maîtrise de toutes les combinaisons de nombres dont le résultat est inférieur à 100:

- carrés de nombres;
- racines carrées de 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 et 100;
- puissances de 3 jusqu'à la 4^e;
- puissances de 2 jusqu'à la 6^e;
- double des 50 premiers nombres;
- triple des 33 premiers nombres;
- quadruples, quintuples;
- etc.

Enfin, les exercices de problèmes oraux permettent à l'aide de situations simples, de mieux assimiler la compréhension de certaines expressions parfois difficiles à saisir comme:

- combien de fois plus?
- combien de fois moins?
- combien de plus?
- combien de moins?
- augmenté de, diminué de,
- ôté, retranché, ajouté, perdu,
- etc.

En outre, certains problèmes de taxe et d'intérêt peuvent très bien se résoudre mentalement sans même avoir recours aux fractions, par la simple utilisation de la multiplication et de l'addition dans ℕ .

Exemples:

1. Calculer la taxe de vente de 8% sur un achat de 3,50 $.
   À 0,08 $ du dollar on a:

   3 fois 0,08 $ ⟶ 0,24 $
   moitié de 0,08 $ ⟶ 0,04 $
   0,28 $

2. J'achète une auto de 5 500 $
   Quel est le montant de la taxe de vente?
   Combien devrai-je payer en tout?
   À 8 $ du 100 $
   je paye 80 $ du 1 000 $
   donc, 5 fois 80 $ ⟶ 400 $
   5 fois 8 $ ⟶ 40 $
   440 $

   ou à 8 $ du 100 $
   je paye 55 fois 8 $ ⟶ 440 $

CHAPITRE 7

L'utilisation de la mathématique

7.1 Introduction

Il existe de nombreuses publications sur le sujet. Plusieurs pédagogues, en effet, se sont penchés sur cette question et l'ont étudiée sous un grand nombre d'aspects. Cependant, la place accordée à la résolution de problèmes, dans les programmes de mathématique ou dans l'enseignement, n'a pas toujours été conforme à son importance réelle en tant qu'élément formateur de l'intelligence de l'enfant. Il faut dire qu'on n'apprend pas à résoudre des problèmes uniquement par de longs et fastidieux exercices d'imitation.

Si l'on veut que la résolution de problèmes constitue une démarche valable d'apprentissage et de formation, on doit laisser à l'enfant l'occasion d'exercer ses facultés d'intelligence, de jugement et d'imagination pour les appliquer à la recherche, à l'analyse et à l'organisation des données du problème.

La facilité à résoudre des problèmes dépend, dans une très large mesure, de l'intelligence et de l'habileté à lire de l'enfant, deux facteurs importants sur lesquels on n'a qu'une influence limitée dans un programme de mathématique. Non moins importants sont les facteurs suivants: la compréhension que l'enfant a des opérations fondamentales sur les nombres et, surtout, son expérience antérieure de l'utilisation de ces opérations dans des situations familières.

7.2 Choix des situations de problèmes

En premier lieu, il faut veiller au choix des situations de problèmes, de façon à susciter l'intérêt des enfants, soit parce que ces situations se situent au niveau de leurs préoccupations quotidiennes, soit parce qu'elles sont de nature à éveiller leur curiosité intellectuelle. Il faut donc encourager les situations "ouvertes" où les problèmes ne sont pas strictement déterminés suivant une solution unique, ce qui est beaucoup plus conforme à ce qui se présente dans la réalité quotidienne.
Cependant, il ne faut pas non plus exclure toute forme de "problème fermé". Trop souvent, les problèmes sont présentés uniquement dans des textes écrits et leur solution est ramenée à une disposition particulière dans le cahier de l'élève. Toute situation propre à faire réfléchir l'élève constitue une matière à la présentation d'un problème. C'est dire qu'un problème peut être amené de plusieurs façons telles que:

- graphiques,
- relevés (statistiques),
- équations,
- textes écrits,
- textes oraux,
- activités mathématiques.

Comme la majorité de ces aspects sont traités ailleurs, d'une manière ou de l'autre, on ne reprend pas ici l'étude de chaque point. On trouve, en effet, des suggestions d'approches pour les graphiques et relevés statistiques dans le fascicule G sur les mesures. Pour les textes oraux, on peut se référer au chapitre 6 du présent fascicule. On trouvera également des suggestions d'activités mathématiques en parcourant l'ensemble des fascicules. Enfin, on aurait le plus grand profit à relire certaines sections du fascicule A sur le **développement de la pensée chez l'enfant par des activités mathématiques, l'utilisation de situations pédagogiques variées et le rôle des problèmes dans l'apprentissage de la mathématique.**

On se borne donc ici à parler d'exercices écrits. L'exploitation d'une situation peut se faire en respectant les étapes déjà suggérées en 7.1 (voir également le tableau de la figure 7.2). C'est très souvent grâce à ce type d'exercices, qu'on peut le plus facilement initier l'enfant à l'analyse de situations, à l'interprétation du langage et à la traduction de ce langage sous formes propositionnelles et en termes d'opérations à résoudre. Quand un problème se pose en des termes justes et accessibles, sa compréhension et sa résolution deviennent l'objet d'une seule et même opération de l'intelligence. Tout ce qui manque, pour en formuler la réponse ou la solution, c'est l'écoulement d'un certain laps de temps. En effet, on s'est plu souvent à répéter que dans une démarche de nature scientifique, un problème non résolu, c'est un problème mal posé et que la personne qui en trouve la réponse est celle-là même qui sait se poser les bonnes questions.

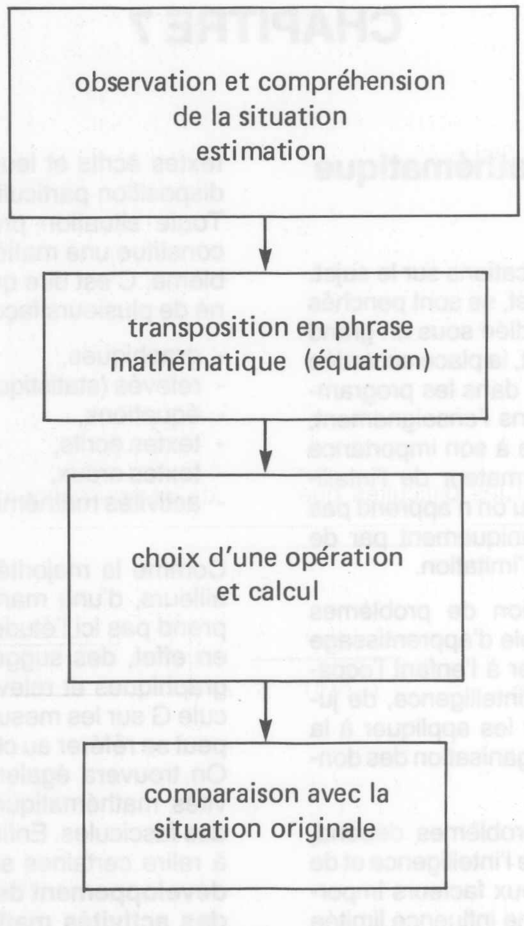


FIGURE 7.2

7.3 Terminologie

Très souvent l'enfant est victime de certaines ambiguïtés de langage que seul peut lever un examen attentif du contexte:

"Je veux partager également 250 $ entre 12 personnes.
Combien restera-t-il d'argent?

Comme on retrouve le mot "RESTE" et dans la soustraction et dans la division, certains enfants sont induits en erreur ou hésitent dans le choix de l'opération à exécuter.

Autre exemple:

Jean a 241 cartes de hockey soit 27 **de plus** que Louis et **41 de moins** que Pierre. Combien de cartes Louis et Pierre ont-ils chacun?

Malgré l'expression **de plus,** ou plutôt à cause de cette expression, Louis aura (241 − 27) cartes, c'est-à-dire que le calcul du nombre de ses cartes se fait à l'aide d'une **soustraction,** tandis que pour Pierre, la situation est tout à fait le contraire.

Autre exemple:

Un marchand d'articles de sport a vendu 2 121 bâtons de hockey, soit trois fois **plus** que l'an dernier. Combien en a-t-il vendu l'an dernier?

Pour plusieurs, le mot "plus" devient ici source de confusion. S'agit-il d'une multiplication ou d'une division? ou peut-être même d'une addition? Il n'est pas toujours facile pour l'enfant, d'interpréter correctement certains termes utilisés dans le langage parlé ou écrit: de plus, de moins, fois plus, fois moins.

On pourrait citer de nombreux autres exemples et formuler des remarques analogues au sujet de la "traduction" ou interprétation d'expressions comme: tant de moins, tant de plus, combien de fois moins, combien de fois plus, ôter, retrancher, soustraire, ajouter, gagner, perdre, augmenter, réaliser un gain, un profit ou une perte, acheter, vendre, prélever une taxe, ajouter la taxe, déduire l'intérêt, accorder un rabais, etc.

Parfois, la difficulté d'un problème est doublée du fait qu'il faille en situer les données dans le temps et dans l'espace:

- "Aujourd'hui, il fait quatre degrés **de plus** qu'hier et cette température, selon les prévision se situe à quatre degrés **de moins** que demain. S'il faisait 12° hier, combien fera-t-il demain?"
- "Louis a parcouru 12 kilomètres en 6 heures. Louis va deux fois plus vite que Paul. Combien Paul parcourt-il de kilomètres en 2 heures?"

Ces exemples illustrent bien les difficultés que doivent résoudre les enfants dans l'interprétation des données d'un problème.

Enfin, l'enfant doit développer une certaine habileté à discerner les données essentielles, des données superflues, dans la résolution des problèmes:

- M. Lebrun vend 5 modèles d'auto différents à des prix variant de 6 500 $ à 10 200 $. Il a 27 employés à son service et son chiffre d'affaires est de 1 500 000 $ par année. Si en vendant une auto 8 200 $ il fait un profit de 600 $, combien a-t-il payé cette auto?

7.4 Analyse et organisation des données

Voici, à titre de suggestion, une illustration de ce qu'on pourrait demander à un enfant de faire.

Prix de vente de l'auto:	8 200	$
Profit:	600	$
Achat de l'auto	7 600	$

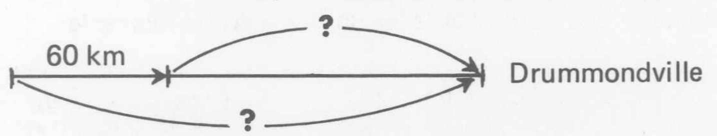
8 200 – 600 = 7 600

On ne saurait trop insister sur la nécessité de bien **circonscrire la question posée** de même que les données pertinentes au problème, lorsqu'il y a lieu d'écarter celles qui sont superflues.

On peut aussi avoir recours à des **dessins, figures et schémas** pour tenter de mieux saisir les relations possibles à établir entre les diverses données:

- M. Tétreault est en route pour Drummondville. Il a déjà parcouru 60 km, mais il lui en reste le double à parcourir. Quelle est la distance totale qu'il doit franchir, à partir de son point de départ?"

SCHÉMA



Il existe de nombreuses situations de problèmes qui peuvent être mimées par les enfants. C'est sans doute une excellente façon de mieux prendre conscience d'un problème, de le poser d'une manière juste et de parvenir plus facilement à en élaborer une solution.

Pourquoi, enfin, ne pas faire composer des problèmes par les enfants? C'est une autre façon de relier la mathématique à la vie de l'enfant.

La rédaction de problèmes par les enfants est l'occasion non seulement d'appliquer et d'utiliser les connaissances et les techniques apprises, mais encore ils peuvent jouer le "rôle" de situations pédagogiques pour amorcer l'apprentissage de concepts ou de propriétés mathématiques ou pour motiver les enfants à l'exploration et à la découverte de certains faits mathématiques.

Les problèmes devront permettre de développer la pensée mathématique des enfants et les amener à élaborer des stratégies de résolution qui soient applicables à des situations nouvelles.

Réalisé par la Direction des communications
du ministère de l'Éducation 8182-862