Gouvernement du Québec
Ministère de l'Éducation
**Direction générale
du développement pédagogique**

16 — 2300 — 04

GUIDE PÉDAGOGIQUE

• Primaire

MATHÉMATIQUE

Fascicule D
Les entiers relatifs

Direction des programmes
Service du primaire

Décembre 1981

MATHÉMATIQUE

FASCICULE D

LES ENTIERS RELATIFS

UQAM
LABORATOIRE DE DIDACTIQUE
DES MATHÉMATIQUES

ISBN 2 - 550 – 04639 – 0

Dépôt légal – quatrième trimestre 1981
Bibliothèque nationale du Québec.

Table des matières

Introduction

L'utilisation des fractions et des nombres négatifs soulève parfois quelques difficultés. Par exemple, on ne peut se procurer 2,5 radios avec 75 $, si le prix d'un appareil est de 30 $. Par contre, avec 0,75 $ il est possible d'acheter 2,5 m de fil électrique à 0,30 $ le mètre. Il existe donc des situations où l'on peut utiliser des fractions et d'autres où il peut difficilement en être question. De même, s'il existe des contextes où il est possible de parler de nombres plus petits que zéro, il en est d'autres où l'on ne peut pas le faire. Une femme peut fort bien ne pas avoir d'enfants mais elle ne peut pas en avoir *moins* que zéro. Une boîte peut fort bien être vide, elle ne peut pas contenir une quantité moindre que rien. Certaines situations cependant se prêtent particulièrement bien à l'utilisation des entiers négatifs.

Ainsi, lorsqu'il fait suffisamment froid, le thermomètre peut indiquer des graduations inférieures à zéro. Une température de −10° C signifie que la température ambiante est de 10 degrés inférieurs à zéro. De même, en ce qui concerne la hauteur, on peut parler d'un objet qui, jeté d'une hauteur de 50 mètres, passe au cours de sa chute par des points comme 40, 30, 20, 10 et 0 m. Et si ce même objet est jeté d'un avion au-dessus de la mer, cet objet, s'il est plus lourd que l'eau, continuera à descendre après avoir touché la surface de l'eau; il pourra même atteindre le fond à une «hauteur» de −15 m. Enfin, si une auto recule à une vitesse de 10 km par heure, on peut dire que cette auto «avance» à −10 km/h. Le signe *moins* renverse tout, un peu comme le phénomène de la réflexion des arbres et des maisons dans l'eau calme d'un lac...

Longtemps, les mathématiciens ont hésité à utiliser les nombres négatifs, mais le temps a eu raison de ces hésitations lorsqu'on s'est rendu compte qu'on pouvait additionner ces nombres, les soustraire, les multiplier ou les diviser. Comme les résultats obtenus étaient toujours sensés et cohérents et que le système de nombres ainsi formé présentait avec l'adjonction des entiers positifs et du zéro, un modèle mathématique capable de résoudre une foule de modèles physiques, l'usage des entiers relatifs a fini par s'imposer.

Au secondaire, il y a déjà fort longtemps qu'on enseigne et qu'on utilise les entiers relatifs. Ce qui est plus récent, c'est la tendance nouvelle à vouloir aborder l'étude de cet ensemble de nombres dès l'école primaire.

Pourquoi commencer l'étude des entiers relatifs au primaire? L'environnement dans lequel l'enfant évolue justifie-t-il l'introduction de ce système de nombres? Dans l'affirmative, jusqu'à quel point cette mesure est-elle valable? Jusqu'où faut-il aller dans la détermination des objectifs de cet enseignement à l'école primaire?

Il est bien certain que rigoureusement parlant on pourrait se passer de nombres négatifs à ce niveau, comme on pourrait sans doute se passer de notions relatives aux ensembles, aux symétries, aux relations, aux blocs logiques, à la «topologie» et à bien d'autres choses encore. Mais les faits sont là. À travers des expériences et des tentatives pas toujours heureuses, il faut bien l'admettre, l'évolution de la pédagogie de la mathématique a marqué des points. Et si un progrès certain a pu être réalisé dans ce domaine, c'est grâce sans doute à des remises en question et à des réflexions sérieuses sur des orientations nouvelles. Les entiers relatifs appartiennent à la catégorie des sujets qui ont fait l'objet d'études et d'expérimentations pédagogiques dans un passé relativement récent.

Chaque fois qu'on cherche à déterminer un point ou un lieu sur un axe, en fonction d'un repère sur cet axe, on utilise un modèle emprunté en quelque sorte à celui des entiers relatifs. Ainsi en est-il lorsqu'on parle du 2512, rue Lamontagne ouest, du 1035, rue Lenoir est, du 381, rue Saint-Louis nord ou du 638, rue Saint-Jacques sud. Il en est de même lorsqu'on utilise des expressions comme «avant Québec» ou «passé Québec», «au-dessus» ou «au-dessous de zéro», «il est dans le rouge», où les termes «sud», «nord», «est», «ouest», «au-dessus», «au-dessous», «à gauche», «à droite», «en avant», «en arrière», etc. prennent la place des signes «+» et «−» dans l'écriture traditionnelle des entiers relatifs.

Dans ce contexte, les entiers relatifs font donc partie du monde de l'enfant et doivent, de ce fait, faire l'objet d'une pédagogie appropriée. Les pages qui vont suivre vont tenter d'apporter des éléments de réponses aux questions qui viennent d'être posées.

Chapitre I

Fondements de l'apprentissage des entiers relatifs

1.1 Approches mathématiques

Les enfants s'aperçoivent vite dans leur démarche d'apprentissage que la soustraction n'a pas toujours de réponse dans l'ensemble des nombres naturels (Voir colonne II, ci-dessous). D'où le besoin d'inventer des nombres qui pourraient exprimer les résultats de ces opérations et apparaître comme une extension de l'ensemble des nombres naturels.

Examinons les équations suivantes:

I	II
$7 = 5 + \square$	$5 = 7 + \square$
$8 = 6 + \square$	$6 = 8 + \square$
$9 = 7 + \square$	$7 = 9 + \square$
$10 = 8 + \square$	$8 = 10 + \square$
....	....
La réponse qui est la même pour chacune de ces équations est:	Ici, comme dans le premier cas, la réponse est la même dans tous les cas:
$\boxed{2}$	$\boxed{-2}$
Cette même réponse pourrait encore s'exprimer à l'aide de n'importe quel couple figurant dans les équations énoncées plus haut même si ces couples n'y sont pas très explicites:	Elle peut être exprimée par n'importe quel des couples suivants que l'on peut retrouver dans les équations énoncées plus haut.
(7,5)	(5,7)
(8,6)	(6,8)
(9,7)	(7,9)
(10,8)	(8,10)
......	......

Dans la colonne de gauche, on peut remarquer que dans chaque couple le premier élément est supérieur de 2 unités au deuxième élément, tandis que dans la colonne de droite c'est le contraire qui se produit, c'est-à-dire que le premier élément du couple est inférieur de 2 unités au deuxième élément. Par conséquent, on pourrait dire que:

2 est le nom de $\{(2,0), (3,1), (4,2), ...\}$
3 est le nom de $\{(3,0), (4,1), (5,2), ...\}$
-2 est le nom de $\{(0,2), (1,3), (2,4), ...\}$
0 est le nom de $\{(0,0), (1,1), (2,2), ...\}$
etc.

On aurait pu obtenir des résultats analogues avec la «machine à fonctions»

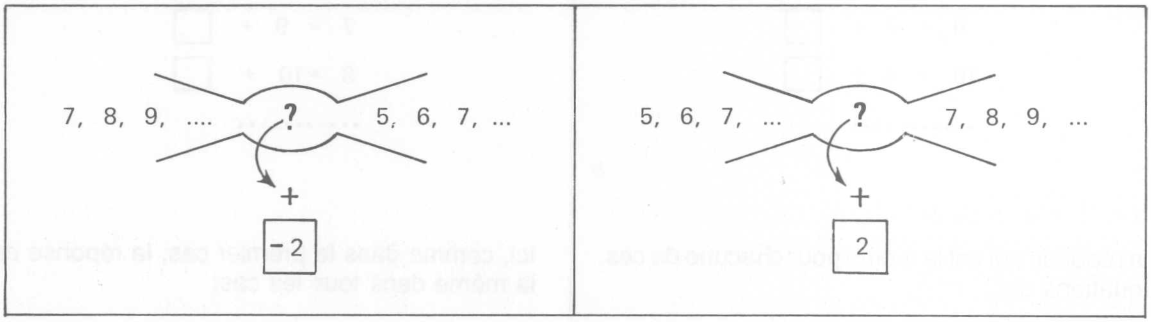


FIGURE I

On se rend compte ici qu'il est possible à partir des nombres naturels, d'inventer d'autres nombres. L'étude de la *dominance* qu'on a vue apparaître ces dernières années, fait partie de ce type d'approche caractérisé surtout par des comparaisons d'ensembles, de mesures, de réglettes, de boules noires ou blanches, etc. On aura l'occasion dans le chapitre sur l'addition, de revenir sur cette notion de *dominance* pour suggérer des *manipulations* et des *jeux* susceptibles d'en faciliter la compréhension.

1.2 Approche intuitive

On aborde souvent les entiers relatifs en utilisant la droite des nombres, les déplacements orientés (les flèches), les barreaux d'échelle, les graduations sur une droite ou sur un thermomètre, les notions de débit et de crédit, de profits et pertes, ou toute autre application de ce genre (Voir l'article 1.3 qui traite de l'ordre sur la droite et de repérage). Cependant, cette démarche n'est pas sans danger. Bien qu'en soi, les exemples mentionnés constituent d'excellents domaines d'*application* pour l'ensemble de nombres considéré ici, il n'en reste pas moins que ces mêmes nombres présentent au primaire des difficultés assez sérieuses d'interprétation et d'utilisation. Certaines notions qui s'y rattachent sont particulièrement difficiles, notamment celles de gains, de déplacements ou de temps négatifs...[1]. Il serait superflu d'insister sur la difficulté d'interpréter de telles expressions par des enfants de cet âge.

De fait, il est assez difficile de trouver un modèle physique qui puisse illustrer élégamment à la fois les nombres relatifs et les opérations sur ces nombres. Le modèle de la *droite des nombres* est probablement celui qui est le plus fréquemment utilisé à cette fin.

[1] Voir p. 1: – «hauteur» de -15 m.
– auto qui «avance» à -10 km/h.

1.3 Repérage sur une droite

L'une des applications les plus fréquentes de l'ensemble $\mathbb{Z}$ c'est le repérage de points sur une droite. En fait, quand doit-on utiliser les entiers relatifs au lieu des nombres naturels dans le repérage de points sur une droite? Chaque fois, peut-on répondre ici, avec une certaine naïveté, que la situation à laquelle on se réfère, l'exige. Ainsi en est-il, par exemple, de l'échelle thermométrique, de certains mouvements, du niveau de l'eau, du déroulement d'un événement en fonction du temps, etc. Dans tous ces cas, le repérage de points sur une droite suppose que ces points peuvent se retrouver d'un côté ou de l'autre d'un certain point pris comme repère, c'est-à-dire du «zéro» de l'ensemble $\mathbb{Z}$ (Voir l'introduction, p.1).

Ainsi donc, toute coordonnée d'un point sur une droite doit posséder deux caractéristiques: elle doit indiquer la distance séparant ce point d'un point de repère et signaler l'orientation de ce point par rapport à ce point de repère.

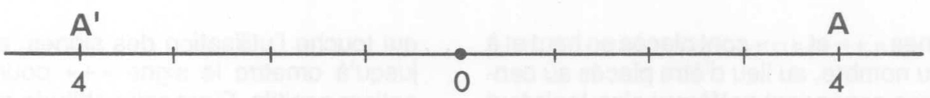


FIGURE 2

Ainsi sur la droite de la figure 2, les points A et A' sont tous deux désignés par le nombre 4. D'où la nécessité d'imaginer une façon de représenter non seulement la distance entre un point et un point de repère, mais encore l'orientation de ce point par rapport au point de repère: à droite ou à gauche, en haut ou en bas. Chacun des symboles utilisés pour repérer un point sur une droite doit donc indiquer ces deux éléments. Ainsi, on pourrait convenir par exemple que les nombres situés au-dessus ou à droite du point de repère (du «zéro») s'écrivent en *noir* tandis que ceux qui se situent au-dessous ou à gauche de ce même point de repère s'écrivent en *rouge*.

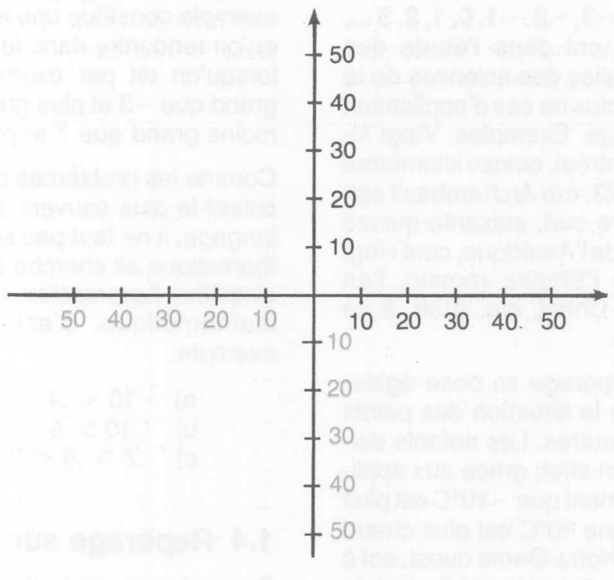


FIGURE 3

Évidemment le choix du *rouge* est tout à fait arbitraire et peut de ce fait, être remplacé par tout autre choix tout aussi arbitraire: chiffres romains, chiffres soulignés: <u>4</u>, <u>5</u>, chiffres encadrés: $\boxed{6}$, $\boxed{9}$, etc. L'usage veut que nous utilisions les signes mathématiques « + » et « − », le signe « + » pour les nombres situés à droite ou au-dessus du «zéro» et le signe « − » dans les cas contraires. Cet usage ne va pas sans susciter certaines confusions, puisque ces même signes sont aussi utilisés pour représenter les opérations d'addition et de soustraction. C'est pourquoi, au début de cet apprentissage, on suggère l'écriture suivante,

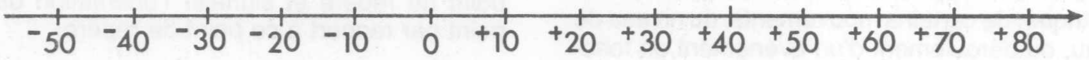


FIGURE 4

où les signes « + » et « − » sont placés en haut et à gauche du nombre, au lieu d'être placés au centre. D'autres cependant préfèrent s'en tenir tout de suite aux notations conventionnelles pour ce qui touche l'utilisation des signes, allant même jusqu'à omettre le signe « + » pour écrire des entiers positifs. C'est cette attitude qui est adoptée ici dans ce fascicule.

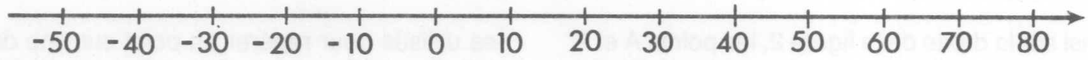


FIGURE 5

Outre les exemples ayant trait au thermomètre et à la chute de corps mentionnés dans l'introduction du présent fascicule, on pourrait aussi mentionner le compte à rebours pour le lancement des fusées:
−40,..., −30,..., −20,..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3 ..., 10, ... C'est probablement dans l'étude des sciences humaines et celles des sciences de la nature qu'on trouvera le plus de cas d'application d'un système de repérage. Exemples: Vingt kilomètres à l'ouest de Montréal, quinze kilomètres au nord de St-Jérôme, 523, rue Archambault est, 1603, boulevard Lapierre sud, soixante-quinze ans avant la découverte de l'Amérique, cent vingt ans après la chute de l'Empire romain, l'an trente-cinq avant Jésus-Christ, etc. (Voir, à ce sujet, l'introduction p. 1).

Avec le problème du repérage se pose également celui qui concerne la situation des points les uns par rapport aux autres. Les enfants doivent se rendre compte en effet, grâce aux applications faites précédemment que −10°C est plus froid que −4°C, tandis que 10°C est plus chaud que 5°C, que le 425, rue Notre-Dame ouest, est à l'est du 1250 ouest de la même rue et à l'ouest du 125 est. Il est à noter toutefois que dans le premier cas, les expressions «plus froid», «plus chaud», «moins froid» et «moins chaud» pour un même type de relation rendent parfois difficiles les symbolisations mathématiques. De plus, la lourdeur du langage utilisé dans le deuxième exemple constitue une image assez fidèle de ce qu'on rencontre dans le langage mathématique lorsqu'on dit par exemple que −5 est moins grand que −3 et plus grand que −7 ou que 5 est moins grand que 7 et plus grand que 3.

Comme les problèmes de communication s'articulent le plus souvent autour de problèmes de langage, il ne faut pas se surprendre que la mathématique ait cherché à uniformiser et même à simplifier l'expression même de cette pensée mathématique. C'est ainsi qu'on écrira par exemple:

a) $-10 < .4$
b) $10 > 5$
c) $.7 > .5 < 2$

1.4 Repérage sur un plan

Du repérage sur la droite il est assez facile de passer au repérage sur un plan. Les tableaux statistiques, les cartes routières, les plans de rues des villes, les cartes géographiques et même les grilles de mots croisés constituent des exemples parmi les plus courants où l'enfant peut s'exercer à une certaine forme de repérage sur un plan. Si l'enfant, généralement n'a pas besoin d'utiliser les entiers relatifs pour se livrer à ce genre d'activités, il reste quand même soumis à l'obligation de se servir de deux coordonnées pour situer un certain endroit sur un plan quelconque (Voir le fascicule F, Chapitre 6: repérage, coordonnées et graphiques).

Le cas des coordonnées géographiques cependant constitue un cas assez particulier dans l'ensemble des exemples énumérés plus haut. En effet, le plan géographique est un plan courbe sur lequel s'alignent des cercles au lieu des droites du plan cartésien.

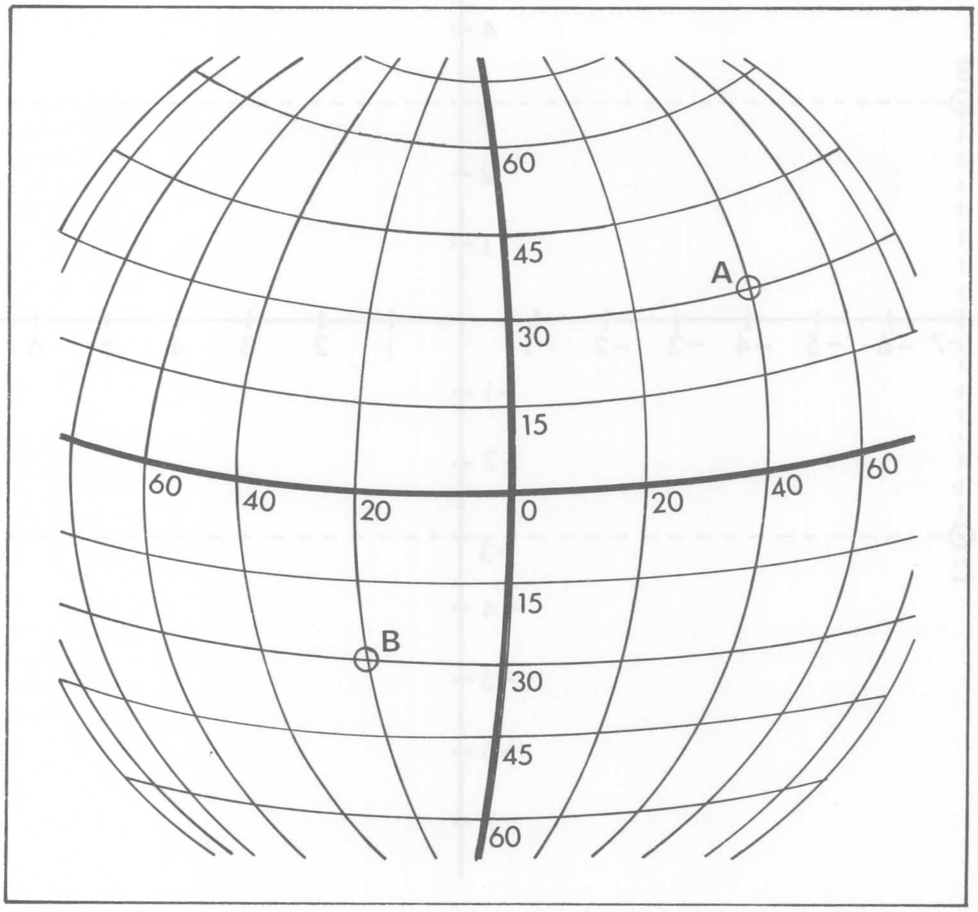


FIGURE 6

C'est en quelque sorte une image de ce qu'on peut retrouver sur un plan cartésien où *est* et *nord* sont remplacés par le signe « + » et où *ouest* et *sud* le sont par le signe » – ». Ainsi dans la figure 6, les coordonnées du point A sont les suivantes: longitude 40° est, latitude 30° nord et celles du point B, longitude 20° ouest, latitude 30° sud.

Pour déterminer des points sur un plan cartésien, on aura donc recours à des coordonnées exprimées à l'aide d'entiers relatifs (Voir la figure 7), si l'on veut situer des points par rapport à des axes déterminés.

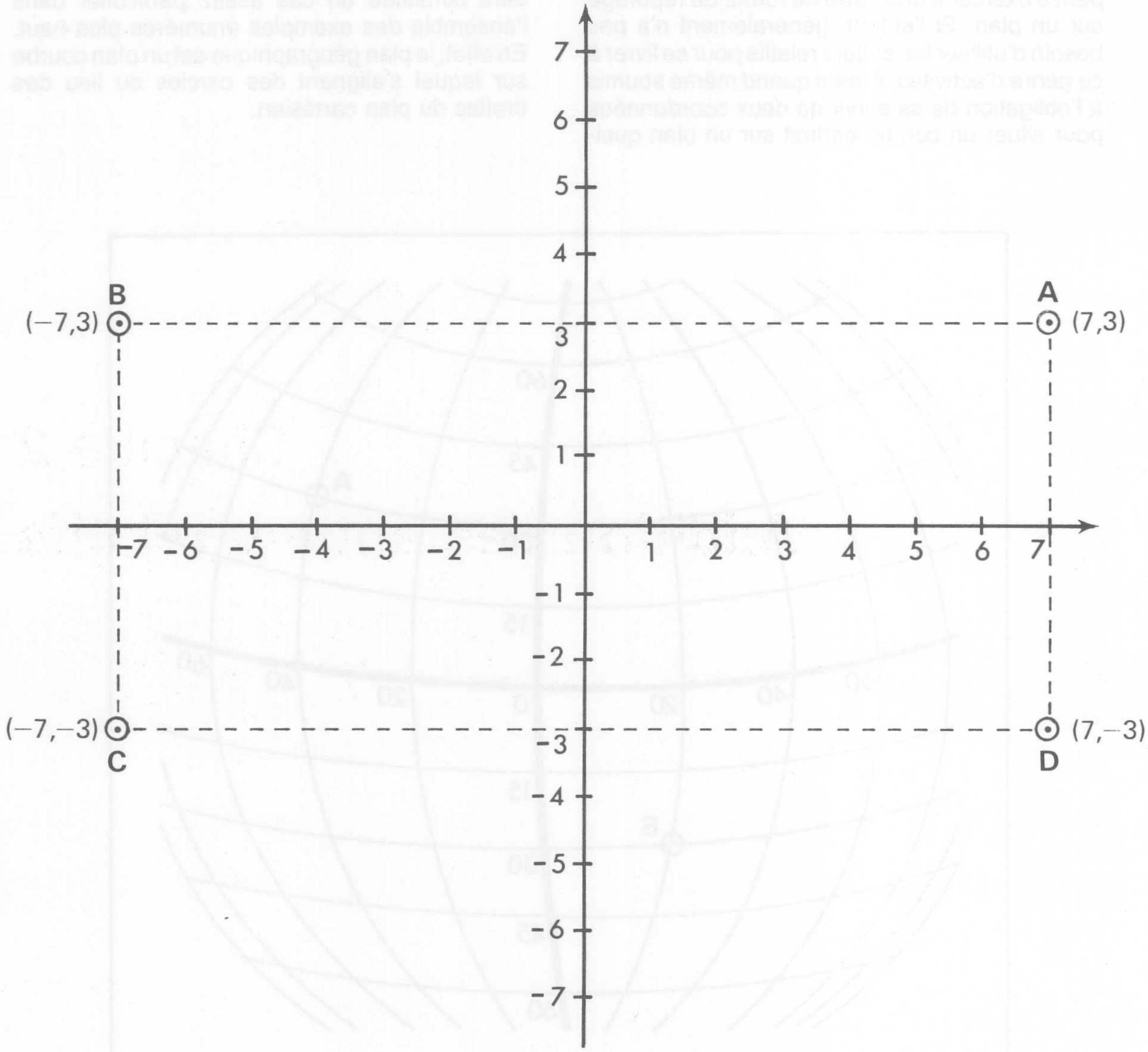


FIGURE 7

1.5 Autres applications concernant les entiers relatifs

Il ne faudrait pas conclure hâtivement, à la lumière des paragraphes qui précèdent, que le repérage sur une droite ou sur un plan constitue la principale sinon la seule application concernant les entiers relatifs. Même si au primaire les applications en ce domaine sont relativement limitées, on peut encore y avoir recours pour mathématiser certaines situations de manipulations ou même de jeux (Voir le dernier paragraphe de la section 1.1 mais voir surtout les chapitres 2 et 3).

Chapitre 2

Addition des entiers relatifs

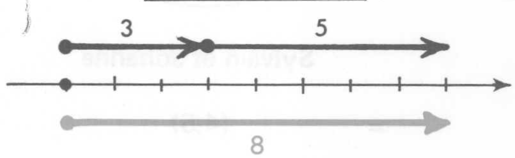
Dans l'apprentissage des entiers relatifs, les modes d'approche peuvent varier comme il a été indiqué au chapitre 1; on peut alors recourir à divers types d'activités d'exploration qu'on souhaiterait voir complémentaires plutôt que mutuellement exclusifs. On profite généralement de ces activités pour mettre en lumière l'importante notion d'*inverse additif.* C'est sans doute dans ce contexte d'activités d'exploration qu'il convient de situer au primaire, l'apprentissage des entiers relatifs.

Voici donc quelques modèles d'exploration dont on pourrait s'inspirer en tout ou en partie pour faciliter l'apprentissage des entiers relatifs.

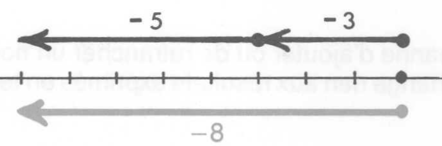
2.1 Déplacements sur une droite

Dans les exemples suivants, l'addition d'un nombre positif est représentée par un déplacement vers la droite, tandis que l'addition d'un nombre négatif l'est par un déplacement vers la gauche.

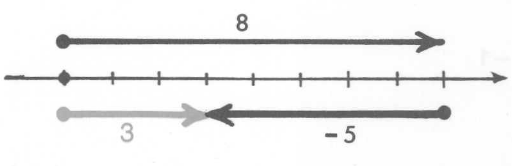
EXEMPLE 1: $\boxed{3 + 5 = 8}$



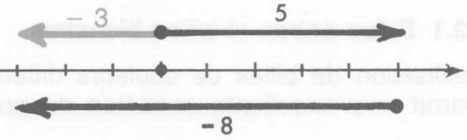
EXEMPLE 2: $\boxed{-3 + (-5) = -8}$



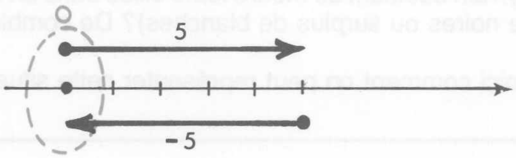
EXEMPLE 3: $\boxed{8 + (-5) = 3}$



EXEMPLE 4: $\boxed{5 + (-8) = -3}$



EXEMPLE 5: $\boxed{5 + (-5) = 0}$



Il s'agit dans ce genre d'exercices, de remplacer deux mouvements successifs (traits noirs) par un seul (trait rouge). L'analyse graphique de l'opération doit mettre l'accent sur le fait que la flèche qui représente le deuxième mouvement (le deuxième terme de l'addition) doit toujours commencer là où finit la première flèche. Quant à la flèche résultante, elle doit joindre le point de départ du premier mouvement au point d'arrivée du deuxième.

Dans l'exemple 5, ci-dessus, il est bien évident qu'il ne peut y avoir de flèche pour illustrer le résultat de l'addition puisqu'à la suite des deux mouvements successifs, on est revenu au point de départ. Ce cas illustre bien la propriété de l'inverse additif (élément symétrique).

2.2 Utilisation de couples de nombres naturels

On peut suggérer ici différentes façons de procéder ou différentes mises en situation toutes axées sur les notions de dominance et de classe d'équivalence telles que présentées à la section 1.1 du premier chapitre. Dans toutes ces situations, pour effectuer une addition de couples, on fait la somme des premiers éléments puis celle des seconds éléments et l'on forme un nouveau couple avec les deux résultats obtenus. Il faut noter ici qu'on peut toujours additionner ou soustraire un même nombre aux deux éléments d'un même couple sans changer la valeur de ce couple (classes d'équivalence) (Voir la remarque à la fin de la section 2.2.1).

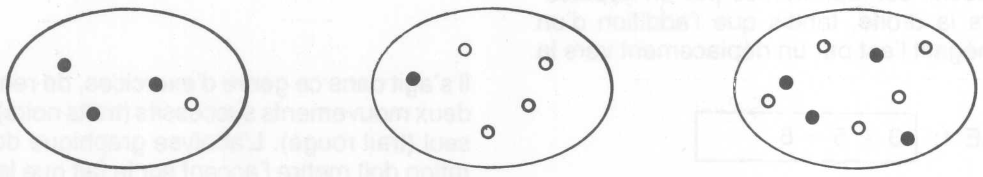
2.2.1 Billes noires et billes blanches

L'utilisation de billes de couleurs différentes fournit une excellente occasion de pouvoir comparer deux nombres de billes et d'établir la différence en plus ou en moins d'un ensemble de billes sur l'autre. Ce genre de manipulations a donné lieu à une forme d'approche qu'on appelle: la *dominance.*

Voici l'exemple d'une situation que l'on peut imaginer à cette fin:

Sylvain possède trois billes noires et une blanche: (3,1) et Johanne une noire et quatre blanches: (1,4). Chez Sylvain on a un surplus (dominance) de 2 noires sur les blanches tandis que chez Johanne on a une dominance de −3 puisqu'il manque trois noires pour égaler le nombre de blanches. Si Johanne et Sylvain décident de mettre leurs billes dans un même sac, quelle sera la dominance des billes (surplus de noires ou surplus de blanches)? De combien sera ce surplus?

Voici comment on peut représenter cette situation:



Sylvain		Johanne		Sylvain et Johanne
(3,1)	+	(1,4)	=	(4,5)
2	+	(−3)	=	−1

FIGURE 1

Remarque: Évidemment, le fait pour Sylvain ou pour Johanne d'ajouter ou de retrancher un nombre égal de billes noires et de billes blanches ne change rien aux résultats exprimés en termes de dominance. Ainsi on aurait pu avoir:

$$(2,0) + (2,5) = (4,5)$$
$$(6,4) + (0,3) = (6,7)$$

etc.

puisque ces additions exprimées en termes de dominance s'exprimeraient toutes de la façon indiquée à la figure 1:

$$2 + (-3) = -1$$

2.2.2 Jetons noirs et jetons blancs

On peut utiliser des jetons de différentes couleurs au lieu des billes décrites dans l'article précédent; les observations formulées au sujet des billes valent alors également pour les jetons.

Voici deux exemples d'utilisation de ce matériel:

EXEMPLE 1: Deux élèves, Jean et Sylvie sont assis l'un en face de l'autre. La table qui les sépare est partagée de la façon illustrée à la figure 2. Jean et Sylvie ont chacun un certain nombre de jetons noirs et de jetons blancs.

Jean commence le jeu en disposant trois jetons noirs à gauche de la table et un blanc à droite. C'est le couple (3,1). Sylvie elle, décide de disposer un jeton noir à gauche et quatre blancs à droite. En combinant leurs pièces, par colonnes, Jean et Sylvie obtiennent les résultats suivants (figure 2):

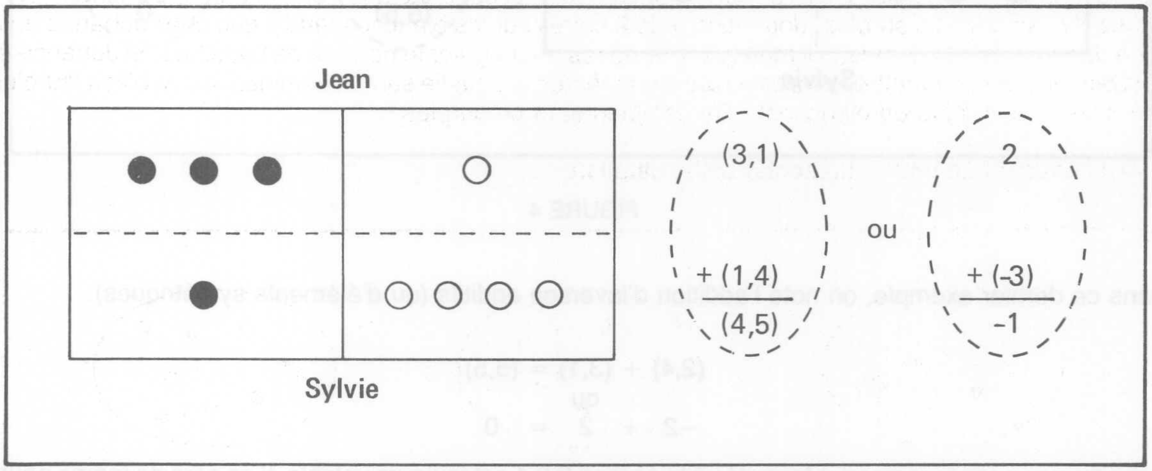


FIGURE 2

EXEMPLE 2: Jean dispose maintenant ses jetons de la façon suivante:

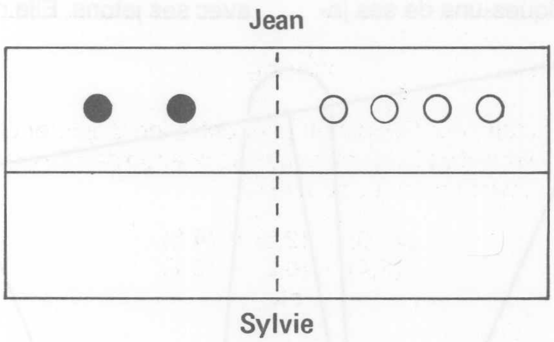


FIGURE 3

Sylvie, à son tour, doit disposer ses jetons de façon que chaque moitié de la table (la gauche et la droite) compte le même nombre de jetons. Si elle choisit d'avoir cinq jetons dans chaque moitié (voir la figure 4), elle devra donc disposer trois jetons d'un côté et un de l'autre. On aura alors le couple (3,1). (Sylvie aurait pu tout aussi bien disposer ses jetons de façon à obtenir des couples comme (4,2), (5,3), (6,4), ..., (44,42), ..., (103,101), ..., (474,472), etc.). On obtient alors une addition qui est illustrée dans la figure 4.

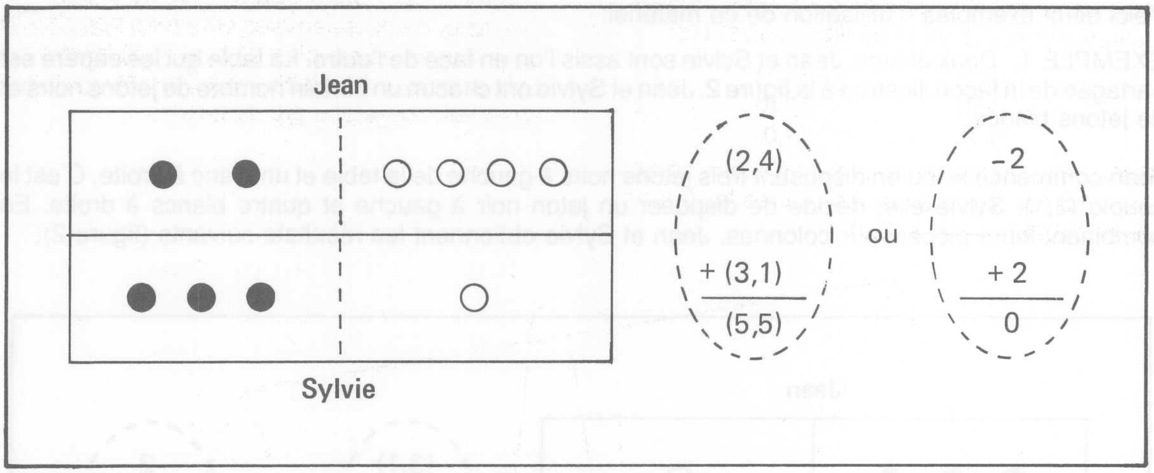


FIGURE 4

Dans ce dernier exemple, on note l'addition d'inverses additifs (ou d'éléments symétriques):

$$(2,4) + (3,1) = (5,5)$$
ou
$$-2 + 2 = 0$$

Dans tous ces cas la remarque formulée à la section 2.2.1 est toujours valable. Il en sera de même pour la section 2.2.3

2.2.3 Utilisation de la balance

EXEMPLE 1: Deux enfants sont assis l'un en face de l'autre, de chaque côté d'une balance. Le premier, Jean, dispose quelques-uns de ses jetons dans chacun des plateaux de la balance: par exemple, 2 jetons noirs dans le plateau de gauche et 4 jetons blancs dans le plateau de droite. Sylvie, elle, tente de rétablir l'équilibre avec ses jetons. Elle note d'abord que les jetons

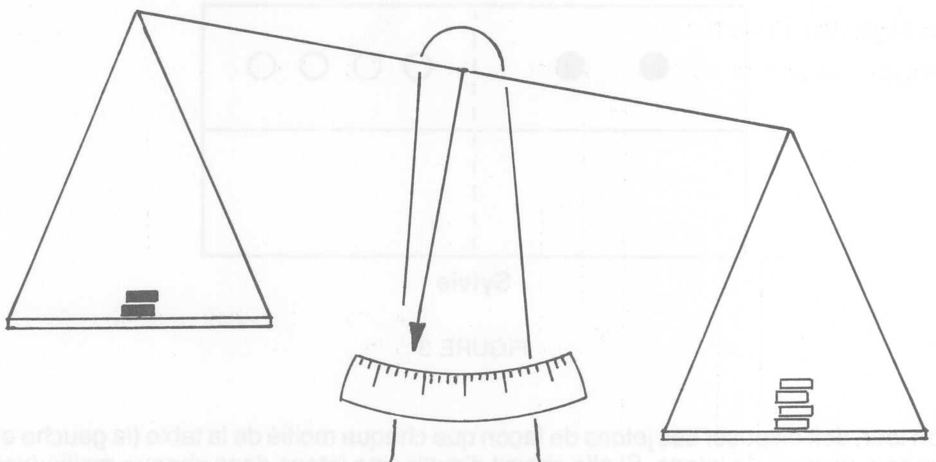


FIGURE 5

de Jean forment le couple (2,4). Elle trouve ensuite les possibilités d'équilibre suivantes:

(5,3)	(3,1)
(6,4)	(10,8)
(7,5)	(2,0)

Enfin, elle essaie de trouver parmi ces couples celui qui est exprimé par les chiffres le plus simples: (28,26) $\longrightarrow$ (2,0)

EXEMPLE 2: Jean pourra ensuite placer, par exemple, deux ensembles de jetons par plateau pour former les couples (2,4) et (6,5) tandis que Sylvie tentera de rétablir l'équilibre avec un seul ensemble de jetons par plateau.

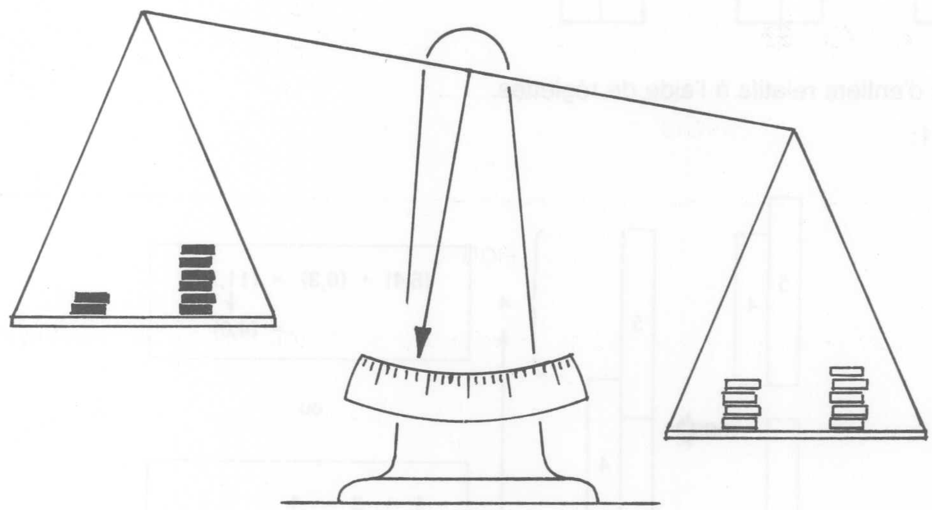


FIGURE 6

Les arrangements correspondant aux couples (6,5) (3,2) ou (2,1) pourront alors rétablir l'équilibre. En effet, Jean pourrait noter:

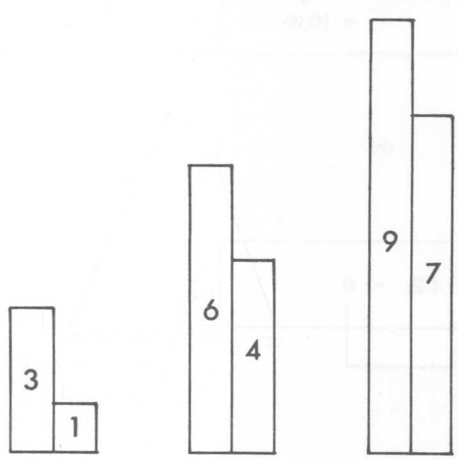
$$(2,4) + (6,5) + \square \longrightarrow (0,0)$$

et trouver comme réponse (6,5), (3,2), (2,1), etc.

Après une certain nombre de ces exercices il serait possible et souhaitable d'explorer l'addition des entiers relatifs dans une écriture plus conventionnelle: $-2 + 1 + \square = 0$

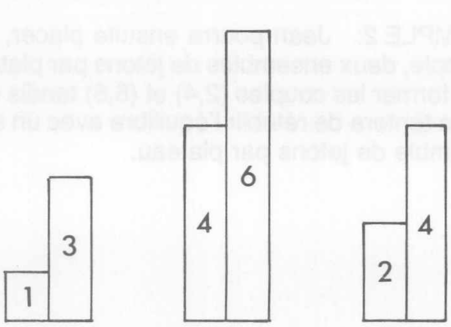
2.2.4 Les réglettes Cuisenaire

a) Exploration des entiers relatifs par l'examen de paires de réglettes.



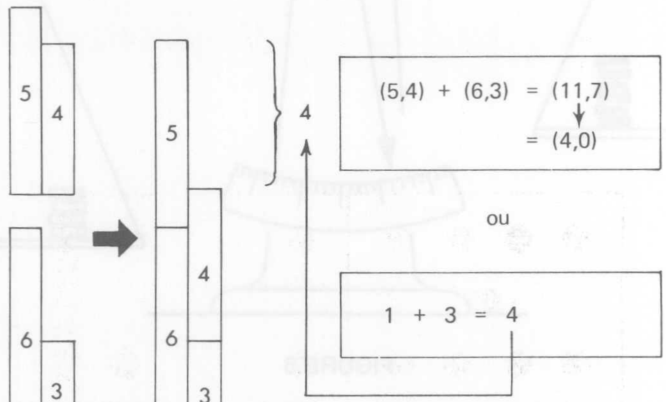
Qu'y a-t-il de semblable dans ces **paires** de réglettes?

Et dans ces autres paires? Quelle différence y a-t-il avec les regroupements précédents?

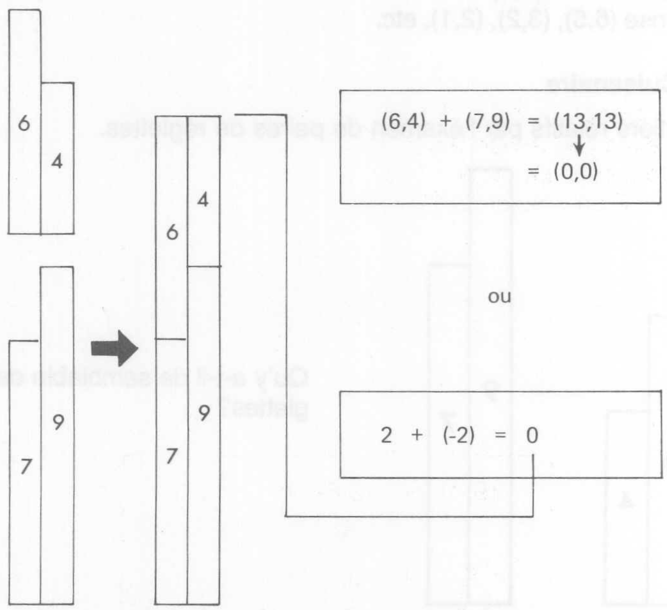


b) Addition d'entiers relatifs à l'aide de réglettes.

EXEMPLE 1:



EXEMPLE 2:

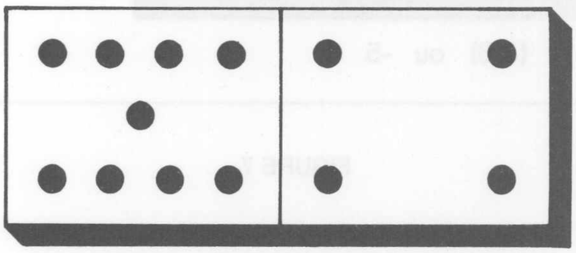


2.2.5 Les dominos

On peut fabriquer des séries de dominos avec des ensembles de points correspondant aux couples suivants:

1) (0,0), (0,1), (0,2), ... (0,9)
2) (1,0), (1,1), (1,2), ... (1,9)
3) (2,0) ...
4)
.
.
.
9) (9,0), (9,1) ... (9,9)

Voici à titre d'exemple, le domino (9,4)



Le jeu consiste alors à placer un autre domino en-bas du premier de façon que le nombre total de points à gauche égale celui de droite. C'est ainsi que dans la figure 7 on obtient l'addition suivante:

(9,4) + (3,8) = (12,12)
ou
5 + (-5) = 0

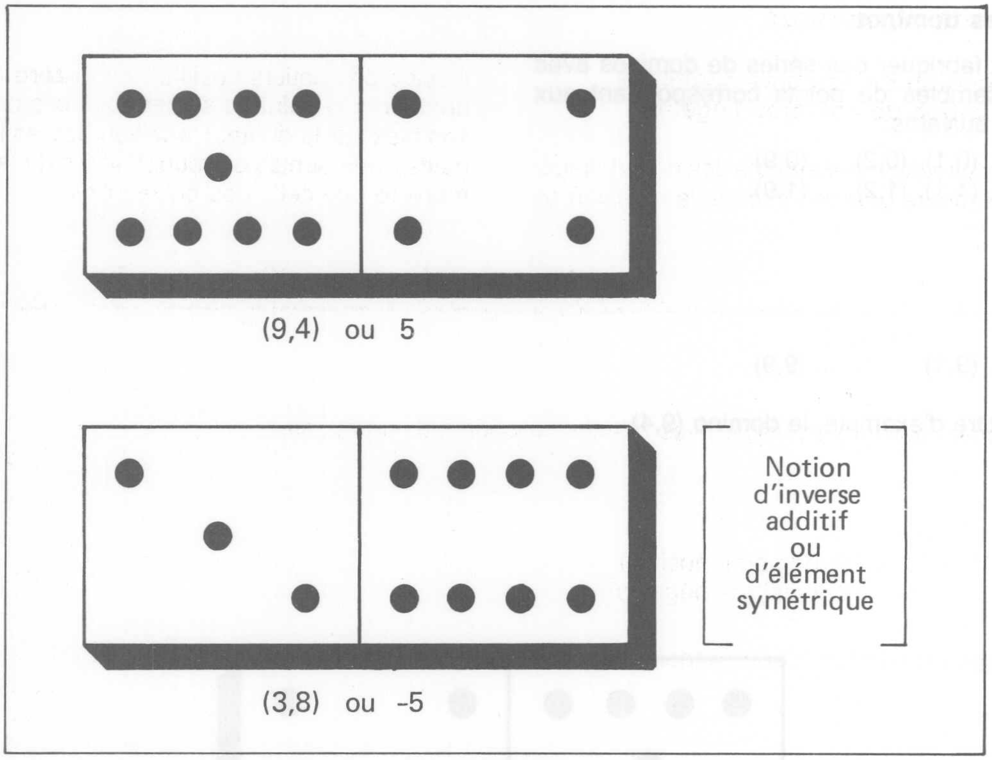
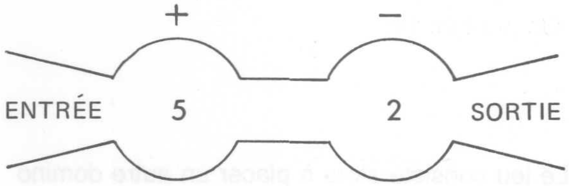


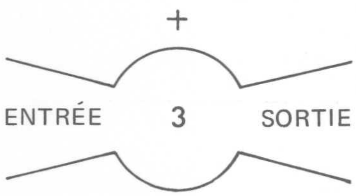
FIGURE 7

2.3 Machines à fonctions

L'utilisation des machines à fonctions constitue une autre façon intéressante d'aborder l'addition des entiers relatifs. En effet, si l'on met en série les opérations: «ajouter 5» et «retrancher 2», la machine à fonction peut se représenter un peu comme ceci:



Ainsi tout nombre qui pénètre dans la machine subit deux transformations qui, en réalité, équivalent à une seule: «ajouter 3».



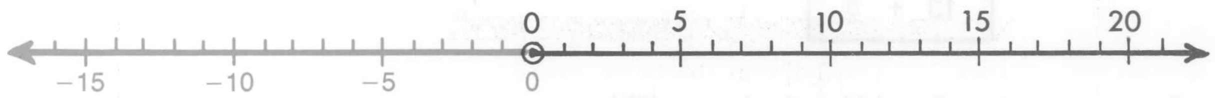
Il est donc relativement facile de conclure que l'addition de 5 et de -2 donne 3:

$$5 + (-2) = 3$$

2.4 Droite numérique

2.4.1 Addition de nombres positifs et addition de nombres négatifs

On peut considérer l'ensemble des entiers négatifs sur la droite graduée comme la réflexion ou l'image des entiers positifs[1], où le **zéro** deviendrait alors le point de symétrie de ces deux ensembles sur la droite. L'addition des entiers négatifs (représentés en rouge) se fait de la même manière que celle des entiers positifs



(représentés en noir) en utilisant les mêmes propriétés d'opérations.

Ainsi,

7 + 13 = 20 (nombres positifs)
5 + 8 = 13 (nombres négatifs)

Il n'est pas plus difficile d'additionner des nombres négatifs entre eux que d'additionner des nombres positifs.

2.4.2 Inverse additif (élément symétrique)

La situation se complique cependant lorsqu'il s'agit d'additionner des nombres positifs avec des nombres négatifs. C'est ici que la notion d'*inverse additif* prend toute son importance.

On peut écrire:

4	+	4	=	0
7	+	7	=	0
121	+	121	=	0

où les nombres

4	et	4
7	et	7
121	et	121

sont respectivement les inverses additifs (éléments symétriques) l'un de l'autre.

1. Voir l'introduction, page 1.

2.4.3 Addition de nombres positifs avec des nombres négatifs

Si on veut additionner par exemple 13 + 5, on utilise alors les propriétés explicitées en 2.4.1 et 2.4.2:

$$\boxed{13 + 5}$$

Devient	(8 + 5) + 5	(addition d'entiers positifs)
ou	8 + (5 + 5)	(inverses additifs) ou
ou	8 + 0	(éléments symétriques)
ou	$\boxed{8}$	

Chapitre 3

Soustraction des entiers relatifs

Avec l'ensemble $\mathbb{N}$, l'addition et la multiplication de nombres permettent toujours d'obtenir comme réponses des éléments de ce même ensemble. Il n'en est pas de même cependant pour certaines soustractions comme $4 - 7 = \square$, ou $6 - 11 = \square$. L'extension de l'ensemble des nombres naturels à l'ensemble plus vaste des entiers relatifs corrige cette situation puisqu'à tout couple d'entiers relatifs on peut faire correspondre, par cette même opération de soustraction, un autre entier relatif. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'était fermé que pour l'addition et la multiplication; l'ensemble $\mathbb{Z}$ l'est également pour la soustraction:

$\boxed{4 - 7 = -3}$ $\boxed{6 - 11 = -5}$

Cependant la tâche de faire comprendre aux enfants comment on peut obtenir ces résultats n'est pas particulièrement facile. Le maître aura souvent beaucoup de difficultés à imaginer des situations simples qui puissent amener l'enfant à effectuer de telles opérations.

Peut-être conviendrait-il ici d'amener l'enfant à mieux percevoir les liens à établir entre les opérations d'addition et de soustraction[1].

Ainsi, $5 - 2 = 3$ ou $5 - 3 = 2$ parce $2 + 3 = 5$. De même, pourrait-on écrire: $4 - (-1) = 5$ puisque $-1 + 5 = 4$ (voir le chapitre 2). Ceci est loin d'être évident. Aussi bien, il serait prudent, au cours primaire, de toujours accompagner une soustraction d'entiers relatifs, de manipulations appropriées. On peut alors recourir au matériel décrit au chapitre 2 et qui a servi à l'apprentissage de l'addition.

Soit l'addition suivante[1]:

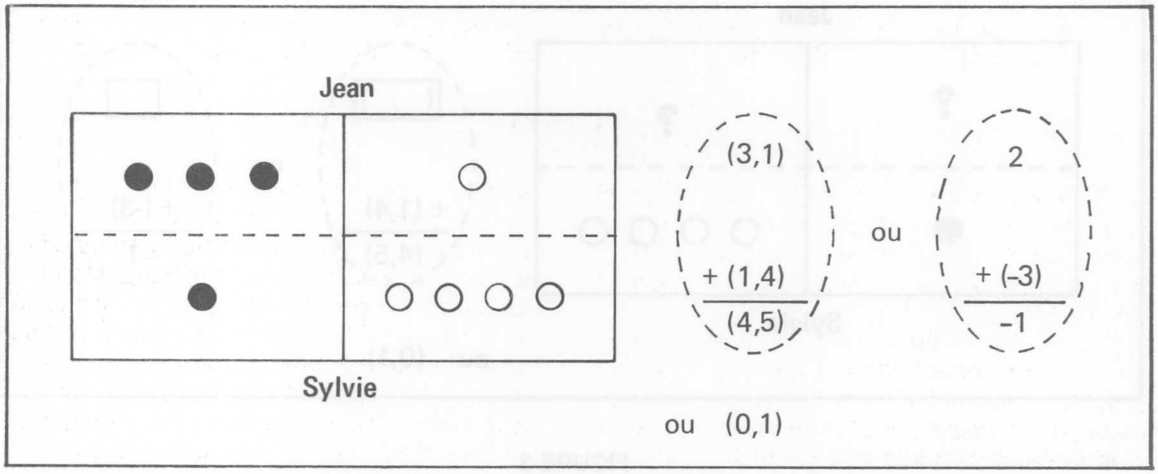


FIGURE 1

Les soustractions correspondantes seraient alors:

1)	$(4,5) - (3,1) = (1,4)$	$-1 - 2 = -3$
ou 2)	$(4,5) - (1,4) = (3,1)$	$-1 - (-3) = 2$

(Voir figures 2 et 3)

1. Voir le fascicule C du Guide pédagogique, chapitre 3.
1. Voir exemple 1, section 2.2.2

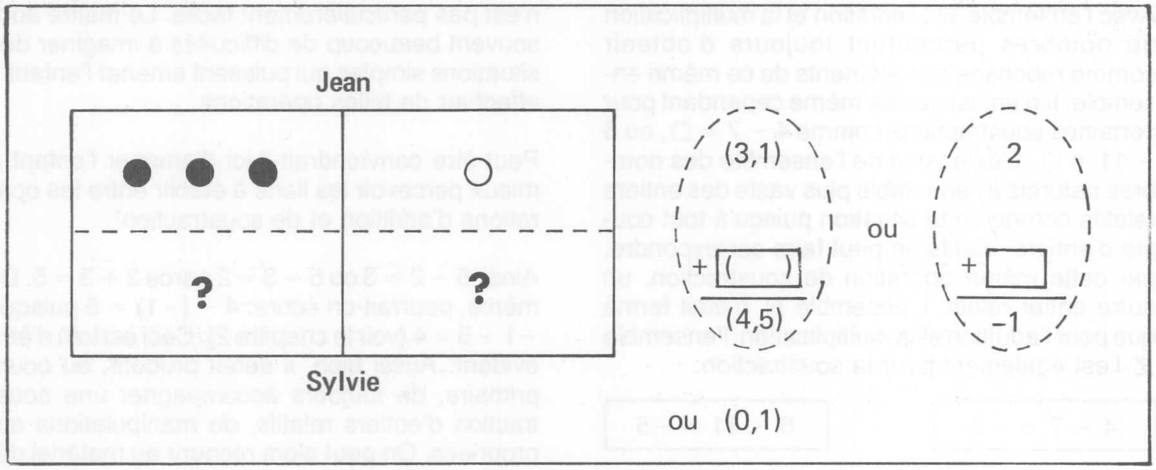


FIGURE 2

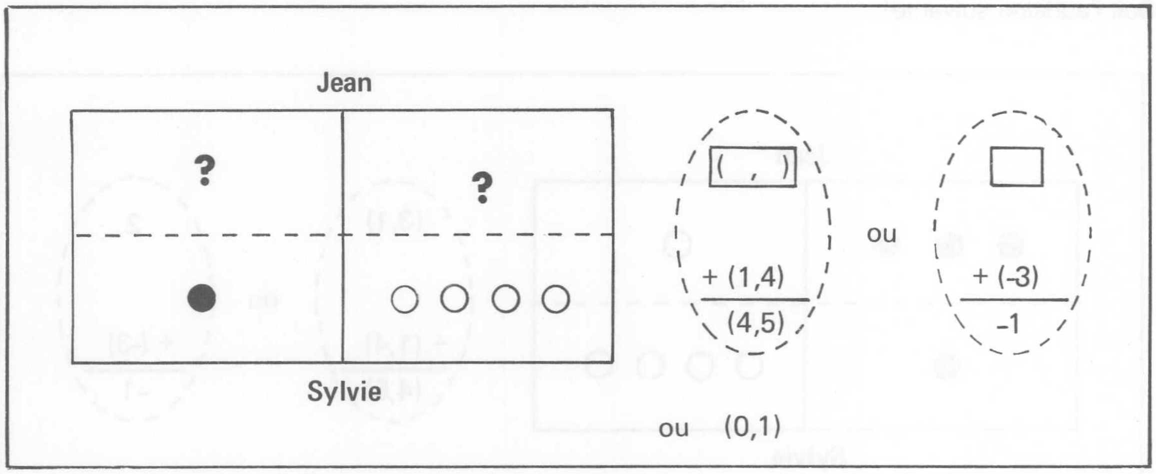


FIGURE 3

Cette démarche ne présente pas de difficulté majeure. Le problème se corse cependant si au lieu du couple (4,5) pour la somme, on écrit le couple équivalent: (0,1).

La démarche à suivre en ce cas, c'est de transformer un tel couple en un autre couple équivalent dont les termes soient respectivement égaux ou plus grands que ceux du couple à soustraire.

C'est ainsi que si l'on veut soustraire, par exemple, les couples (3,1) ou (1,4) du couple (0,1), on transforme alors ce dernier couple en un couple équivalent comme (3,4), (4,5), (5,6), ...

On peut ici imaginer facilement d'autres exemples analogues tirés des diverses situations présentées au chapitre 2 sur l'addition: utilisation des ensembles, balance, dominos, réglettes Cuisenaire.

Remarque: On pourrait toujours à la rigueur s'arrêter à une définition de la soustraction fondée sur l'utilisation de l'*inverse additif*.

Dans ce cas la soustraction d'un entier relatif s'effectue par l'addition de l'inverse additif de ce même nombre.

$$3 - 4 = 3 + (4) = 7$$

$$7 - 3 = 7 + 3 = 4$$

ou

$$3 - (-4) = 3 + 4 = 7$$

$$7 - 3 = 7 + (-3) = 4$$

Évidemment, la notion d'inverse additif n'est pas facile à acquérir même si elle constitue un élément essentiel de cette dernière approche. Voilà pourquoi on s'entend généralement pour n'aborder qu'au cours secondaire, cet aspect de la soustraction des entiers relatifs.

Conclusion

Quelle importance faut-il attacher aux diverses approches suggérées dans ce fascicule? Celle qu'il faut accorder aux premières impressions d'un enfant quand il aborde un nouveau sujet d'étude, surtout lorsqu'on sait que ces premières impressions provoquent souvent des fixations d'apprentissage dans son esprit. C'est d'ailleurs à ces premières expériences, à cet acquis expérimental de première main que l'enfant se référera plus tard lorsqu'il éprouvera des difficultés de compréhension. Il faudra donc apporter un soin particulier à la présentation de ces premières notions d'apprentissage afin de prévenir certaines confusions trop fréquentes dans ce domaine.

On aura parfois de la difficulté à imaginer des situations d'apprentissage inspirées du contexte quotidien dans lequel l'enfant évolue. Les situations proposées à titre d'exemple dans l'introduction pourront toujours être utilisées à cette fin. Il semble indispensable, pour assurer la motivation des élèves et faciliter la compréhension de ces concepts, de tenter d'orienter cet apprentissage en fonction des expériences de l'enfant. Cette préoccupation devra animer les maîtres dès l'introduction de ces notions. Ainsi, par exemple, on pourra demander aux élèves ce qui va arriver si le mercure du thermomètre descend sous la ligne du zéro. On pourra également leur demander ce qu'on peut faire avec une équation du genre.

$$4 = 7 + \square$$

Il ne s'agit pas d'être capable de répondre à ces questions dès le départ, mais uniquement de se rendre compte de la nécessité d'«inventer» de nouveaux nombres si l'on veut pouvoir résoudre certains types de problèmes qui se posent très souvent.

Annexe I

Entiers relatifs et «régularités»

Chercher à compléter des séries déjà commencées selon un modèle ébauché dans les premiers éléments de la série, peut aussi fournir l'occasion de situer les entiers relatifs dans un contexte d'extension des nombres naturels (Voir page 3, 1er paragraphe, section 1.1). L'utilisation de la calculatrice en classe peut facilement aboutir à de telles situations.

En voici quelques exemples:

EXEMPLE 1:

$5 - 1 = 4$
$5 - 2 = 3$
$5 - 3 = 2$
$5 - 4 = 1$
$5 - 5 = \ldots$
$5 - 6 = \ldots$
$5 - 7 = \ldots$

EXEMPLE 2:

$8 + 3 = 11$
$8 + 2 = 10$
$8 + 1 = 9$
$8 + 0 = 8$
$8 + (-1) = 7$
. . . .

EXEMPLE 3:

$6 - 3 = 3$
$6 - 2 = 4$
$6 - 1 = 5$
$6 - 0 = \ldots$
$6 - (-1) = \ldots$
$6 - (-2) = \ldots$
$6 - (-3) = \ldots$
. . . .

EXEMPLE 4:

$4 - 1 = 3$
$3 - 1 = 2$
$2 - 1 = 1$
$1 - 1 = \ldots$
$0 - 1 = \ldots$
$-1 - 1 = \ldots$
$-2 - 1 = \ldots$
. . . .

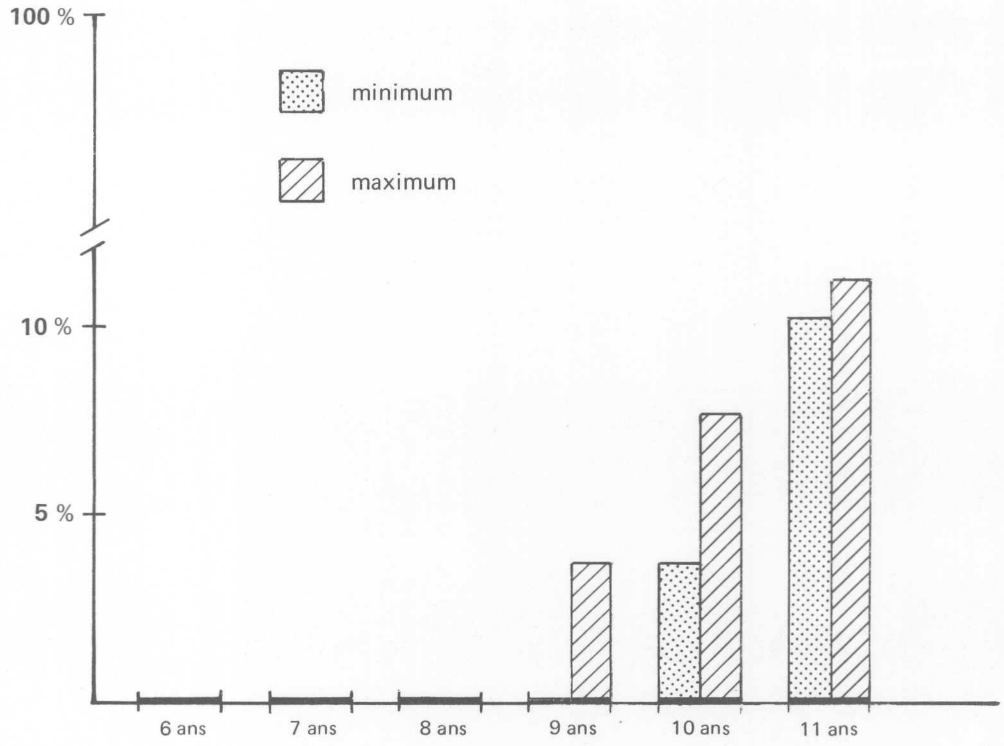
EXEMPLE 5:

$-2 + (-3) = -5$
$-2 + (-1) = -3$
$-2 + 1 = -1$
$-2 + 3 = 1$
. . . .

Même si certains des résultats obtenus peuvent paraître surprenants pour l'enfant, celui-ci ne manque pas de réaliser qu'ils s'inscrivent aisément dans un processus de continuité qui lui paraît de toute évidence fort acceptable.

Annexe II

Proportion du temps à accorder à l'enseignement des entiers relatifs



Réalisé par la Direction des communications
du ministère de l'Éducation 8182-531