



Gouvernement du Québec  
Ministère de l'Éducation  
Direction générale  
du développement pédagogique



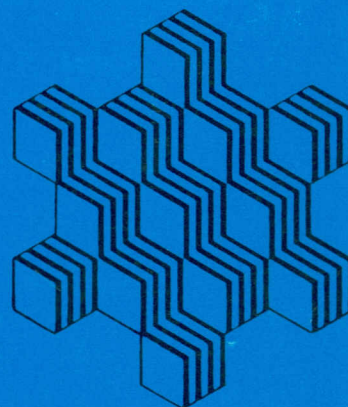
16 — 2300 — 05

# **GUIDE PÉDAGOGIQUE**

## **• Primaire**

### **MATHÉMATIQUE**

#### **Fascicule E Les fractions**



# guide pédagogique

---

**PRIMAIRE**

**MATHÉMATIQUE**

**FASCICULE E  
LES FRACTIONS**

**UQAM**  
**LABORATOIRE DE DIDACTIQUE**  
**DES MATHÉMATIQUES**

U.O.A.M.  
LABORATOIRES DE  
MATHÉMATIQUES ET  
D'INFORMATIQUE

MATHÉMATIQUES

FASCICULE 3

LES FRACTIONS

ISBN 2 - 550 - 00675 - 5

Dépôt légal — quatrième trimestre 1980  
Bibliothèque nationale du Québec

© Gouvernement du Québec  
Ministère de l'Éducation, 1980

## TABLE DES MATIÈRES

|                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------|----|
| PRÉSENTATION .....                                                 |    |
| INTRODUCTION .....                                                 | 1  |
| 1. ORIENTATIONS GÉNÉRALES                                          |    |
| 1.1 Terminologie et symbolisme .....                               | 2  |
| 1.2 Fractions et nombres décimaux .....                            | 3  |
| 1.3 Fractions et développement intellectuel .....                  | 3  |
| 1.4 Répartition du programme .....                                 | 4  |
| 2. NOTION DE FRACTION                                              |    |
| 2.1 Origine de la fraction .....                                   | 7  |
| 2.2 La fraction comme nombre .....                                 | 7  |
| 2.3 La fraction comme quotient .....                               | 9  |
| 2.4 La fraction comme opérateur .....                              | 9  |
| 2.5 Exploitation de la notion de rapport .....                     | 12 |
| 2.6 Utilisation du tableau de fractions .....                      | 12 |
| 2.7 Utilisation de la droite numérique .....                       | 13 |
| 2.8 Pourcentage .....                                              | 14 |
| 2.9 Probabilités .....                                             | 14 |
| 3. ÉGALITÉ ET INÉGALITÉ DE FRACTIONS                               |    |
| 3.1 Fractions équivalentes .....                                   | 15 |
| 3.2 Comparaison de fractions .....                                 | 18 |
| 3.3 Activités complémentaires .....                                | 18 |
| 4. NOMBRES DÉCIMAUX                                                |    |
| 4.1 Importance des nombres décimaux .....                          | 24 |
| 4.2 Fractions décimales .....                                      | 24 |
| 4.3 Notation décimale .....                                        | 24 |
| 4.4 Division de deux nombres naturels .....                        | 25 |
| 5. OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS                                    |    |
| 5.1 Notion d'opération .....                                       | 26 |
| 5.2 Addition et soustraction .....                                 | 26 |
| 5.3 Multiplication .....                                           | 29 |
| 5.4 La division comme opération inverse de la multiplication ..... | 30 |
| 6. OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES DÉCIMAUX                             |    |
| 6.1 Égalité et inégalité de nombres décimaux .....                 | 32 |
| 6.2 Addition et soustraction .....                                 | 32 |
| 6.3 Multiplication .....                                           | 33 |
| 6.4 Division .....                                                 | 33 |
| CONCLUSION .....                                                   | 35 |



## PRÉSENTATION

Le présent fascicule, *Fractions*, s'inscrit dans la Série des fascicules déjà prévus pour constituer un *Guide pédagogique* à l'usage des maîtres et des conseillers pédagogiques. Les fascicules A, F, G, H ont déjà paru et voici maintenant le fascicule E sur les fractions.

L'enseignement des fractions à l'école primaire a suscité et suscite encore bien des interrogations auxquelles il n'est pas toujours facile de trouver réponse. Si l'on semble d'accord pour dire que l'ensemble des nombres rationnels doit être considéré comme une extension des nombres naturels, les opinions sont beaucoup plus divergentes en ce qui concerne la façon dont cette extension doit être présentée dans l'enseignement primaire.

Le problème se révèle encore plus complexe si l'on superpose à ces considérations celles qui portent sur la terminologie et sur l'importance relative qu'il faut attacher aux fractions ordinaires et aux nombres décimaux. Selon son orientation, on choisit souvent d'enseigner ou de ne pas enseigner certaines opérations selon les algorithmes que l'on privilégie.

La rédaction d'un guide pédagogique sur une matière aussi controversée n'est pas une tâche facile. L'ouvrage n'est sans doute pas parfait mais il est honnête. Il ne néglige aucun des aspects mentionnés plus haut. Et s'il adopte parfois des positions bien définies, il autorise également des choix pédagogiques.

Nul doute que ce guide saura éclairer et guider nos maîtres dans leur enseignement et leur fournir une aide utile et précieuse.



## Introduction

Le seul fait d'entendre le mot «fraction» suscite souvent de l'inquiétude chez de nombreux éducateurs soit parce qu'il leur rappelle leur propre apprentissage laborieux de cette notion, soit qu'il évoque les difficultés didactiques de cette partie du programme de l'enseignement mathématique.

Les fractions forment un ensemble de nombres dont l'apprentissage suit un long processus qui ne se terminera qu'au-delà de l'école primaire. Ce thème constitue une partie importante du programme; aussi faut-il lui assurer le temps de réflexion nécessaire à l'élaboration d'un programme cohérent, d'une part, et à l'orientation de notre action pédagogique en classe, d'autre part.

Les fractions sont présentes dans la vie de tous les jours au même titre que les nombres naturels et l'enfant en a une première perception avant même son entrée à l'école. En fait, les fractions se sont infiltrées dans tout ce qui se quantifie, dans les unités de mesure de Système international d'unités (SI), dans toutes les situations de commerce, dans les données statistiques ou dans des probabilités, dans les notes d'un bulletin scolaire, et dans quoi encore!

L'enseignement des fractions fait l'objet de beaucoup de recherches de tout ordre au Québec et un peu partout dans le monde. Ces recherches, ajoutées à l'implantation du Système international d'unités, ont fait évoluer le contenu mathématique dans le sens d'une plus grande insistance sur les nombres décimaux; elles ont également suscité l'élaboration de nouvelles approches pédagogiques et l'arrivée sur le marché de nouveaux outils didactiques.

La majorité des milieux scolaires a déjà pris une option fondamentale quant à l'enseignement des fractions, enseignement qui diffère parfois beaucoup d'un milieu à l'autre mais qui s'appuie généralement sur un ensemble de pratiques éducatives qui tient compte des besoins du milieu. Nous ne saurions condamner telle position particulière, pas plus que nous ne pouvons en privilégier une ni les exprimer toutes; nous désirons seulement préciser le cadre dans lequel de tels choix pédagogiques devraient se faire.

C'est à l'ensemble de ces préoccupations et de ces objectifs que nous tenterons de répondre dans ce fascicule. Pour des raisons de commodité et de clarté, des chapitres différents traitent de notions dont l'apprentissage est intimement lié; cependant, au-delà de cette dissection, le lecteur doit rechercher une conception globale et vivante de l'enseignement des fractions.

\* Pour des raisons d'ordre pédagogique, la fraction devrait toujours s'écrire avec un trait horizontal:  $\frac{3}{4}$ .

Cependant, dans le présent fascicule, à cause des contraintes typographiques imposées par la grosseur des caractères utilisés, la fraction sera souvent représentée dans les textes avec un trait oblique. Les enseignants voudront bien tenir compte de cette remarque et n'utiliser dans leur enseignement que le trait horizontal.

## Orientations générales

### 1.1 Terminologie et symbolisme

La définition et l'utilisation d'un symbolisme ont toujours soulevé beaucoup de controverses dans l'enseignement mathématique en général et, plus particulièrement, dans celui des fractions; mais le problème pédagogique n'est pas tant le besoin d'un symbolisme unique et universel que l'utilisation en classe de termes justes.

La confusion vient en grande partie de la disparité des expressions utilisées dans différents ouvrages pour représenter une même situation et de l'évolution de ces expressions au fil des années. Le présent fascicule ne prétend pas définir une terminologie contraignante: il s'agit simplement de *fournir suffisamment d'indications pour assurer une compréhension uniforme du texte*.

On ne trouve pas dans les manuels et on ne trouvera probablement jamais un symbolisme unique et universel; aussi, enseignants et élèves auront-ils toujours à faire face à une disparité de termes pour décrire une même situation; il appartient au maître, en classe, d'assurer la continuité de l'apprentissage chez ses élèves en les prévenant que l'usage des symboles peut différer d'un auteur à l'autre; c'est à lui également de leur expliquer le symbolisme qu'il adopte.

#### 1.1.1 Fraction

Une fraction est un rapport entre deux quantités. Pris dans un sens général, le terme «fraction» peut désigner toutes les représentations possibles d'un nombre rationnel.

Mais, pris dans un *sens restreint*, «fraction» se limite à l'expression d'un rapport sous forme de couple  $[a/b$  ou  $(a,b)$ , où  $b \neq 0$ ]; chaque fois qu'il sera employé seul dans ce fascicule, c'est à ce sens qu'il faudra se référer, peu importe que la fraction ait une valeur égale à l'unité, plus petite que l'unité ou plus grande que l'unité.

Au cours de son apprentissage, l'élève est amené à effectuer des transformations dans l'écriture d'une fraction; par exemple, il écrira  $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$  ou encore  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ . Très tôt, il ressentira le besoin de nommer de façon spécifique certains sous-ensembles de fractions afin de faciliter la communication.

C'est ainsi que les fractions dont le numérateur est plus petit que le dénominateur sont appelées «fractions propres» ou «fractions ordinaires»; il s'agit du sous-ensemble des fractions  $a/b$  telles que  $0 \leq a/b < 1$ . Quand les fractions sont égales à l'unité ou plus grandes ( $a/b \geq 1$ ), on les désigne habituellement par l'une ou l'autre des expressions suivantes: fractions impropres ou expressions fractionnaires. Finalement, on nomme généralement symbole numérique mixte ou nombre fractionnaire toute fraction du type de  $2\frac{1}{4}$ .

Comme ces expressions ont davantage une résonance pédagogique que mathématique, et comme elles ne seront utilisées que de façon occasionnelle, nous ne croyons pas avantageux d'en proclamer une meilleure que l'autre. Il nous semble cependant préférable qu'enseignants et élèves d'un milieu donné n'utilisent en classe qu'une seule expression pour désigner la même réalité.

#### 1.1.2 Nombre décimal ou nombre à virgule

Tout nombre exprimé en base dix peut être qualifié de nombre décimal. Toutefois, l'usage courant veut que l'on désigne par cette expression toute fraction exprimée en notation décimale; une virgule sépare la partie entière de la partie fractionnaire (0,4; 3,42; 10,01; 0,3). La barre au-dessus du 3 dans 0,3 signifie que ce chiffre se répète indéfiniment (0,333...).

L'expression «nombre à virgule» désigne tous les nombres comportant une partie entière et une partie fractionnaire; ces derniers sont alors exprimés dans un système à valeur positionnelle (quelle qu'en soit la base). Comme les mathématiques à l'école primaire n'exploitent que les «nombres fractionnaires à base 10», on peut utiliser l'une ou l'autre de ces expressions.

#### 1.1.3 Nombre rationnel

Un nombre rationnel est une classe de fractions équivalentes; il peut donc s'exprimer de plusieurs façons: par exemple, les expressions  $\frac{1}{2}$ ; 0,5;  $\frac{5}{10}$ ; 0,50;  $\frac{5}{10}$  représentent toutes le même nombre rationnel, et chacune peut être utilisée pour le désigner; toutefois, on se sert générale-

ment de l'expression la plus simple, celle où les nombres mis en rapport sont premiers entre eux.

## 1.2 Fractions et nombres décimaux

L'implantation du Système international d'unités a engendré un peu de confusion vis-à-vis de l'enseignement des fractions; nous allons donc essayer de situer, par rapport aux nombres décimaux, l'importance relative des fractions.

Les nombres décimaux constituent certes l'outil-clé pour exprimer la mesure des quantités non entières, au même titre que l'étaient les sous-unités du système anglais: ainsi, en le comparant avec l'unité de mesure, un enfant pouvait dire qu'un objet mesurait un pied et huit pouces bien avant de comprendre l'expression «1 % pied». Il en est de même pour l'enfant qui dit mesurer un mètre quarante.

Les nombres décimaux constituent également une des représentations possibles du nombre rationnel. À ce titre, il convient que, quelque part dans son processus d'apprentissage, l'enfant devienne capable de représenter une situation qui exige l'utilisation de nombres rationnels indifféremment par un couple de nombres  $[a/b$  ou  $(a, b)]$ , par la notation décimale ou par un pourcentage; il devrait même être capable de passer d'une écriture à l'autre.

Toutefois, nous ne croyons pas que l'apprentissage des nombres décimaux et du concept de nombre rationnel puisse se faire sans une bonne compréhension des fractions. Si, pour expliquer les fractions, on juge bon, par exemple, d'exploiter le fait que douze des vingt-quatre élèves d'une classe sont des filles, il vaut mieux utiliser les expressions: «la moitié des élèves», «une demi-classe», «un élève sur deux» ou «douze élèves sur vingt-quatre» que l'expression 0,5; autant les premières expriment un rapport concret et permettent de bien visualiser une situation, autant la notation décimale est abstraite pour l'enfant qui entreprend l'apprentissage des fractions. Ce caractère abstrait du nombre décimal apparaîtrait avec encore plus d'évidence si un maître parlait des 0,375 de ses élèves au lieu des neuf vingt-quatrièmes ( $\frac{9}{24}$ ) ou des trois huitièmes ( $\frac{3}{8}$ ).

L'utilisation des fractions sous la forme  $a/b$  est donc justifiée dans l'enseignement parce que celles-ci permettent la concrétisation des nom-

bres rationnels inhérents à une situation et une meilleure compréhension des mathématiques, même si leur importance pour l'expression des mesures diminue. Pour les mêmes raisons, on devra faire une étude systématique des équivalences et des opérations sur les fractions, tout en insistant sur les nombres décimaux; d'ailleurs, les fractions sous forme de couple sont utilisées même dans les activités de mesure: trois quarts d'heure, un mètre et demi, un quart de litre, etc. Évidemment, on se limitera à travailler avec des fractions simples et usuelles, délaissant ainsi celles qu'on ne rencontre jamais dans la vie courante.

L'apprentissage des nombres décimaux, leur utilisation pour représenter les aspects fractionnaires de la réalité, et la conversion d'une fraction de type  $a/b$  en nombre décimal (et vice versa) demeurent des objectifs de l'enseignement primaire, mais ils n'y seront pas introduits avant que l'enfant ait maîtrisé le concept de fraction.

## 1.3 Fractions et développement intellectuel

La notion de nombre rationnel s'acquiert peu à peu et, semble-t-il, différemment selon les enfants. Surtout depuis les travaux de Piaget, plusieurs auteurs ont cherché à en graduer les difficultés.

Un premier niveau (1) de compréhension de la fraction, atteint tôt par l'enfant, se caractérise par la prise de conscience des deux termes de la fraction: le partage du tout, et la réunion des parties qui résultent de ce partage. L'enfant peut réaliser sans difficulté l'une ou l'autre de ces opérations séparément, mais non l'une et l'autre conjointement.

Par exemple, placé devant un ensemble de 8 objets, il peut en déterminer le quart puisqu'il n'effectue alors qu'une seule opération (un partage en 4 parties). Par ailleurs, si on a préalablement subdivisé ce même ensemble en 4 sous-ensembles de 2 objets chacun, l'enfant de ce premier niveau peut aussi en délimiter les trois quarts (la réunion de 3 parties).

(1) HÉTU, Jean-Claude et DESJARDINS, Michel: *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions*. Presses de l'Université du Québec, p.p. 39-69.

Plus tard, habituellement vers 9 ou 10 ans, il devient apte à combiner ces opérations de partage et de réunion, et cela constitue un deuxième niveau. Son apprentissage doit toujours s'appuyer sur des manipulations concrètes; c'est alors qu'il saisit, entre autres, la notion de fraction équivalente. À ce stade, l'enfant peut trouver spontanément et sans aide les trois quarts d'un ensemble de 8 objets.

Le troisième niveau, généralement caractérisé par un début de pensée formelle, permet la comparaison de deux fractions tirées de deux entités différentes; l'âge moyen d'apparition de ce niveau se situerait vers 11 ou 12 ans.

Ensuite, l'enfant ne se contente plus de confronter des quantités ou des rapports déterminés par un partage, mais peut évaluer les relations que chaque fraction entretient avec son entier: cet apogée de la compréhension du concept de nombre rationnel, la conceptualisation de l'invariance d'un rapport, n'apparaîtrait qu'exceptionnellement avant 13 ou 14 ans. Par exemple, le nombre représentant le tiers d'un ensemble de billes pourra être considéré équivalent à celui qui représente le tiers d'une surface plane.

Ces recherches ne prétendent pas mettre un point final aux connaissances sur le sujet. Elles nous amènent cependant à réfléchir sur la perception qu'un enfant de tel âge peut avoir d'un nombre comme  $\frac{1}{2}$  ou  $\frac{3}{4}$ ; elles nous obligent également à tenir compte de ces aspects dans l'élaboration de nos démarches et de nos méthodes.

#### 1.4 Répartition du programme

Nous avons dit, au début, que l'enseignement des fractions avait été l'objet de nombreuses prises de position; c'est surtout en ce qui concerne la répartition du programme qu'elles sont le plus tangibles et le plus marquées.

Nous présentons dès maintenant deux tableaux dont l'objectif est de permettre une meilleure compréhension des chapitres suivants. La figure 1 illustre trois projets de répartition, entre les classes de l'enseignement primaire, des objectifs de contenu relatifs au thème des fractions; de plus, dans ce tableau, nous avons distingué deux types d'activités pédagogiques: la partie en  symbolise une phase d'exploration et la partie en  représente des apprentissages plus systématiques ou des applications de notions. Les catégories d'objectifs correspondent

grosso modo aux cinq prochains chapitres de ce fascicule. Nous laissons au lecteur le soin d'analyser ces propositions et de se constituer un «projet personnel» en choisissant pour chaque section la répartition qui correspond le mieux à ses besoins.

Quant à la figure 2, elle représente, pour chaque classe d'âge, le pourcentage de temps qu'on pourrait allouer à l'enseignement des fractions, dans le temps global accordé à la mathématique. La partie hachurée horizontalement indique un pourcentage maximum. L'intervalle ainsi créé respecte les indications fournies dans le programme. Dans un milieu particulier, on peut évidemment répartir différemment son temps d'enseignement en retardant ou en avançant tel ou tel apprentissage. Il importe cependant qu'à la fin du second cycle, tout enfant ait effectué les apprentissages prescrits au programme.

On constate, à l'examen du tableau mentionné précédemment, que le thème des fractions devrait occuper de 15 à 20% du temps. D'autres répartitions pourraient être justifiables, c'est pourquoi celle-ci n'a pas de caractère obligatoire: elle vise surtout à souligner l'importance d'évaluer le temps consacré à un apprentissage particulier par rapport à l'ensemble du programme et aux relations entre ses différents thèmes.

Nous croyons que tous ces tableaux et, plus particulièrement, l'ensemble des options qu'ils sous-tendent respectent à la fois la lettre et l'esprit du programme. Ces études quantitatives n'épuisent pas tous les cheminements possibles; elles mettent en évidence les réflexions qu'il faut s'imposer pour équilibrer les situations d'apprentissage que nous présentons aux enfants. La meilleure répartition demeure celle que chaque milieu aura élaborée pour répondre aux besoins spécifiques de ses élèves.



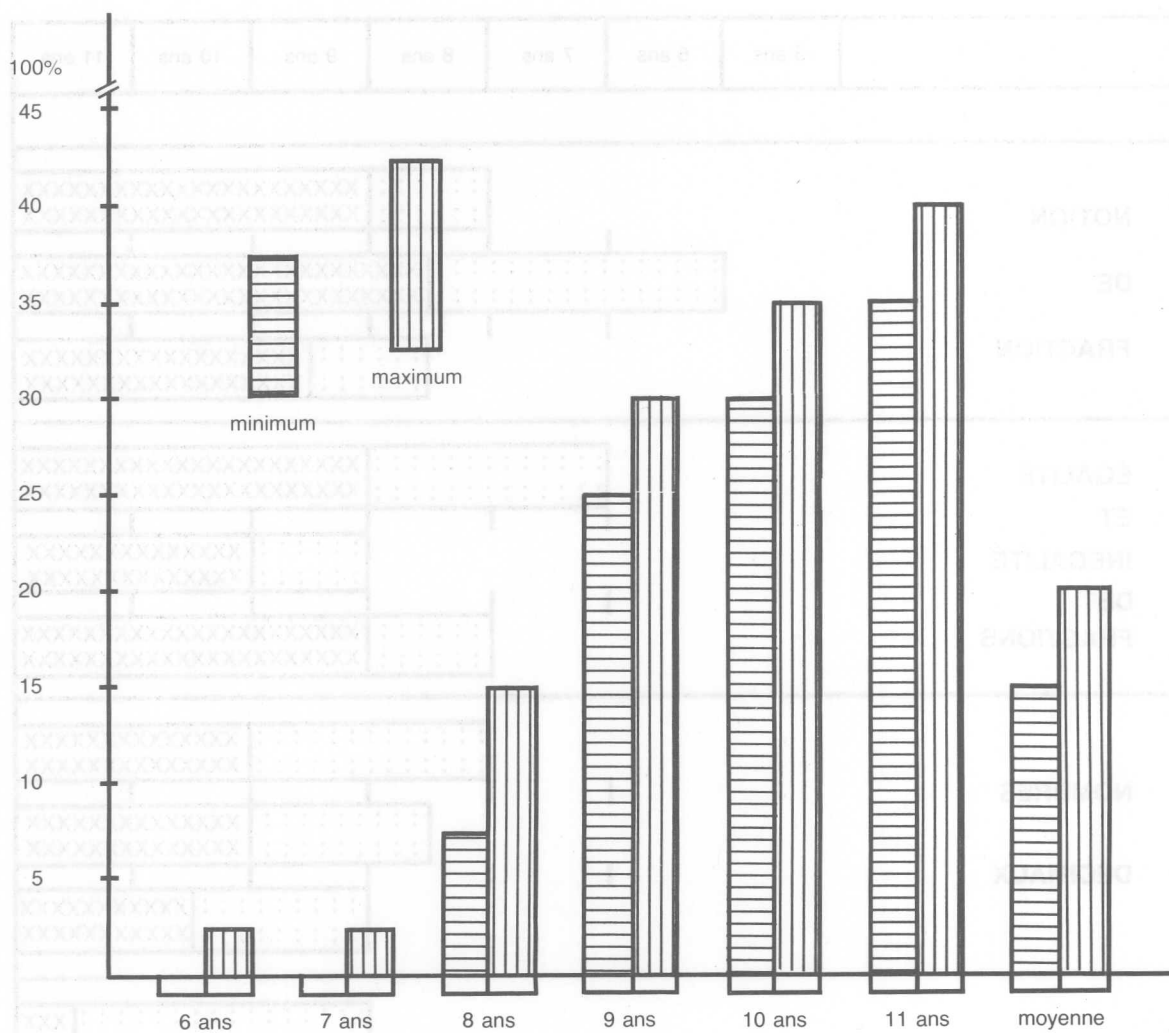


FIGURE 2

## Notion de fraction

### 2.1 Origine de la fraction

L'importance de ce chapitre apparaît dès qu'on réfléchit à l'origine de cet ensemble de nombres que sont les fractions, ou qu'on tente d'imaginer un monde où seuls existeraient les nombres naturels, ou encore dès qu'on cherche où et quand, à l'école primaire, on rencontre des situations qui entraînent l'utilisation de fractions.

Il est certain que l'enfant entre de bonne heure en contact avec les fractions, même s'il saisit les nombres naturels bien avant ces dernières. Au début du primaire, en même temps que son apprentissage des nombres naturels, l'enfant rencontre des fractions (ex.: un demi), qu'il considère comme des quantités au même titre que 1, 2 ou 3. Pensons à l'enfant qui reçoit un demi-biscuit alors qu'il en désirait deux...

La perception de l'adulte est plus raffinée: il tient compte de l'aspect original de la fraction, partie d'un entier, qu'il s'agisse du résultat du partage d'un tout (un gâteau) ou d'un ensemble d'objets (les élèves d'une classe); il peut comparer des fractions qui n'ont pas un même dénominateur, ou qui sont exprimées différemment: couple de nombres, notation décimale ou même dessin; il utilise des fractions pour exprimer des rapports; il tient compte également de l'aspect opératoire de la fraction, c'est-à-dire de la fraction considérée comme un instrument de transformation d'une quantité.

Le rôle de l'école est d'établir des liens entre ces perceptions; c'est cet objectif qu'on vise en didactique lorsqu'on amène l'enfant à explorer, de façon comparative, la fraction qui représente une quantité et celle que l'on décompose en une suite de deux opérations. À cet égard, il faut favoriser les démarches et les interventions qui utilisent une grande variété de situations ou de présentations pour expliquer la fraction.

Par conséquent, bien avant que l'enfant acquière les concepts de nombre rationnel et de fractions équivalentes, bien avant qu'il maîtrise ses algorithmes de calcul, il faut faire naître chez lui la perception la plus juste possible de ce qu'est une fraction, du type de rapport que la fraction produit entre deux quantités; en fait, il faut développer la NOTION DE FRACTION.

Il s'agit là de l'élément fondamental du programme de mathématique en ce qui concerne les nombres rationnels; sur ce point, l'enfant doit parvenir à une compréhension maximale. La préoccupation permanente du maître sera d'affiner chez l'enfant la notion de fraction, bien que l'acquisition des habiletés de calcul ne doive pas être exclue; celles-ci, pour lesquelles le degré de maîtrise recherché peut varier, constituent un important complément de formation qu'il convient de situer au moment le plus opportun dans le processus d'apprentissage.

### 2.2 La fraction comme nombre

Placé devant une situation mettant en évidence une fraction simple, l'enfant peut habituellement

l'exprimer à l'aide d'un rapport: la moitié, le tiers, un demi, un quart, un objet sur quatre, etc.

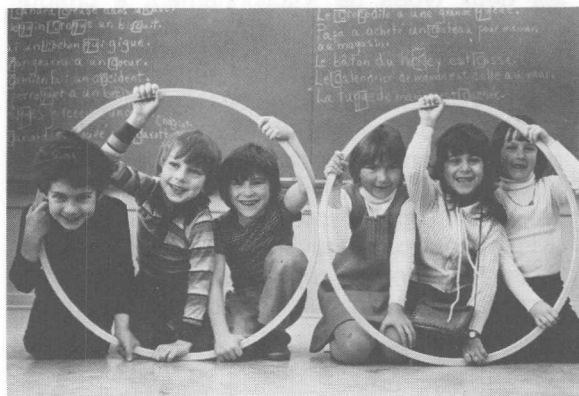
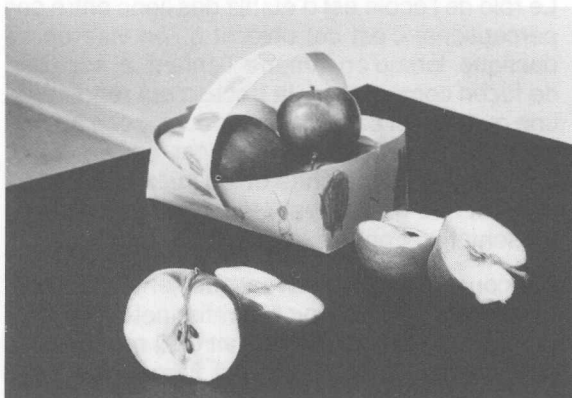


FIGURE 3

«La moitié des enfants sont des filles!» L'expression de cette situation ou d'un état de fait semblable illustre une démarche descriptive; la fraction utilisée a alors un caractère statique. Elle représente donc une quantité ou un «ÉTAT FRACTIONNAIRE».

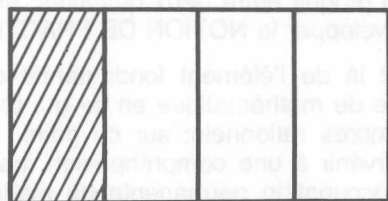
Une fraction peut évidemment représenter une quantité plus grande ou plus petite que l'unité; le plus souvent, toutefois, on l'utilise pour désigner des quantités plus petites qu'une unité:

c'est la fraction comme portion d'un objet ou d'un ensemble d'objets semblables. Voyons quelques exemples.



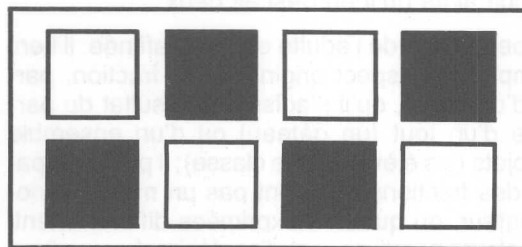
**FIGURE 4**

Si on coupe une pomme en deux, on obtient deux moitiés ou deux demi-pommes; on écrit  $\frac{1}{2}$  pomme, c'est-à-dire, 1 morceau sur 2. Si on ajoute  $\frac{1}{2}$  pomme à une autre  $\frac{1}{2}$  pomme, ça donne une pomme complète; alors, dans deux pommes, on aura quatre demi-pommes.



**FIGURE 5**

«Le  $\frac{1}{4}$  de cette bande est hachurée». Le 4 dans  $\frac{1}{4}$  signifie que la bande a été séparée en 4 parties égales et le 1, que 1 seule de ces parties est hachurée.



**FIGURE 6**

«4 des 8 carrés sont noirs...» Cet exemple permet de présenter différemment les rôles du dénominateur et du numérateur.

Quand on veut faire comprendre le sens de la fraction comme partie d'un tout, à partir d'exemples comme ceux-là ou en utilisant d'autres situations, il peut être intéressant d'attirer l'attention sur le dénominateur en faisant d'abord diviser l'unité en parties égales. Le numérateur devient alors l'indicateur d'une deuxième opération qui consiste à regrouper un certain nombre de parties.

Ces deux derniers exemples (figure 5) soulèvent la distinction entre le fractionnement d'objets (champ, gâteau, cercle, etc.) et le fractionnement d'un ensemble d'objets semblables (figure 6). Même si la notion de fraction semble apparaître plus souvent à partir du premier cas, rien n'indique que l'un soit plus avantageux que

l'autre; les deux présentations font appel aux mêmes opérations logiques. Il s'agit en fait de deux applications complémentaires de la notion de fraction et il convient que l'enfant rencontre les deux types de fractionnement à chaque étape de son apprentissage des fractions.

Cette approche de la fraction à partir du partage d'une unité est une source quasi intarissable de situations pédagogiques permettant d'utiliser adéquatement l'environnement naturel de l'enfant et de favoriser les manipulations indispensables à cet apprentissage. Cette approche n'est évidemment pas nouvelle, mais elle contribue beaucoup à une perception assez précise, chez l'enfant, de la fraction considérée comme un

rapport entre deux nombres, ainsi que des rôles respectifs du dénominateur et du numérateur; c'est pourquoi nous ne saurions trop la recommander.

Au cours d'activités comme celles-là, lors du fractionnement d'une unité, l'enfant commet généralement deux types d'erreurs; ou bien ses parts ne sont pas équivalentes, ou bien il néglige quelques éléments de l'ensemble, ce qui est plus fréquent dans le fractionnement d'un ensemble d'objets semblables. Ces erreurs, qui mettent en cause les fondements mêmes de la notion de fraction, sont parfois dues à la distraction et il suffit alors d'attirer l'attention de l'enfant sur son travail pour qu'il les corrige de lui-même.

### 2.3 La fraction comme quotient

Il serait intéressant de faire prendre conscience aux enfants d'un autre sens de la fraction que l'on utilise fréquemment mais auquel on ne s'arrête que rarement. La fraction peut représenter

le résultat d'une division, c'est-à-dire le quotient.

Supposons que l'on désire partager 8 tablettes de chocolat entre 4 personnes; pour obtenir la part de chacun, on effectue naturellement la division  $8 \div 4$ ; cela semble facile parce que l'opération a 0 comme reste. Par contre, si on avait eu seulement 5 tablettes, on aurait effectué la même opération de division et on aurait obtenu  $\frac{5}{4}$  de tablette pour chacun; ce  $\frac{5}{4}$ , qui est une façon d'écrire  $5 \div 4$ , est aussi le résultat de cette même opération.

De façon plus générale, on constate qu'une fraction peut représenter une opération de division ou un quotient, le numérateur étant alors assimilé au dividende et le dénominateur au diviseur. Ainsi quand on effectue des divisions ayant des restes, par exemple  $15 \div 7$ , «2 reste 1» est une bonne réponse, mais « $2\frac{1}{7}$ » est une réponse aussi exacte et précise du moins quant aux nombres eux-mêmes.

### 2.4 La fraction comme opérateur

En plus d'être un nombre représentant une quantité entière ou non entière, la fraction est souvent présentée par les pédagogues comme un opérateur pouvant transformer une quantité. Ces «fractions du pédagogue» rejoignent les

principes de fonctionnement des « machines à fonction »; elles correspondent, dans le langage usuel, à un commandement, à un ordre ou à une opération permettant de passer d'une quantité initiale à une autre quantité.

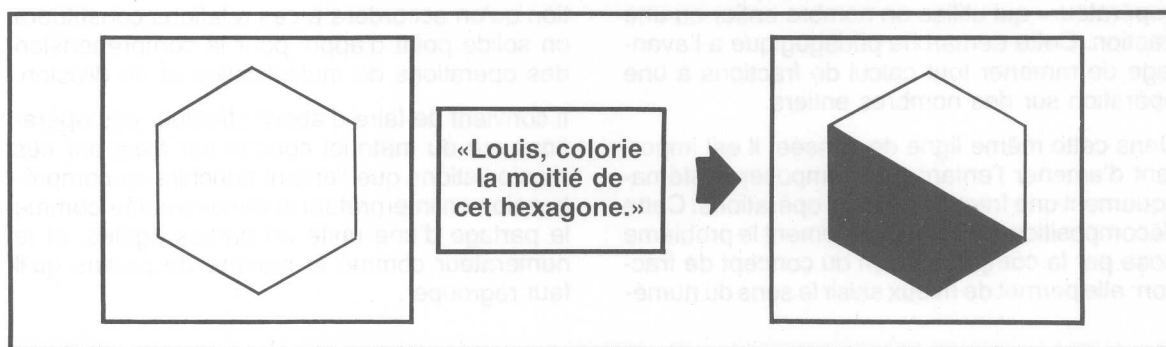


FIGURE 7

C'est ainsi que, dans de nombreux manuels, on utilise l'expression «opérateur fractionnaire» pour désigner ce sens de la fraction, même si les mathématiciens ne peuvent accepter de définir le nombre rationnel comme un opérateur: il ne faut pas perdre de vue que ce sens de la fraction constitue essentiellement une approche

pédagogique dont l'objectif est de permettre à l'enfant de mieux comprendre la notion de fraction. Le nombre rationnel, dont la fraction est une représentation, est un nombre avec toutes ses propriétés; la notion d'opérateur fractionnaire est donc de l'ordre des moyens didactiques.

Les machines à fonction peuvent s'appliquer autant aux fractions qu'aux nombres entiers; en

effet, même si la présentation graphique diffère parfois, le principe est le même.

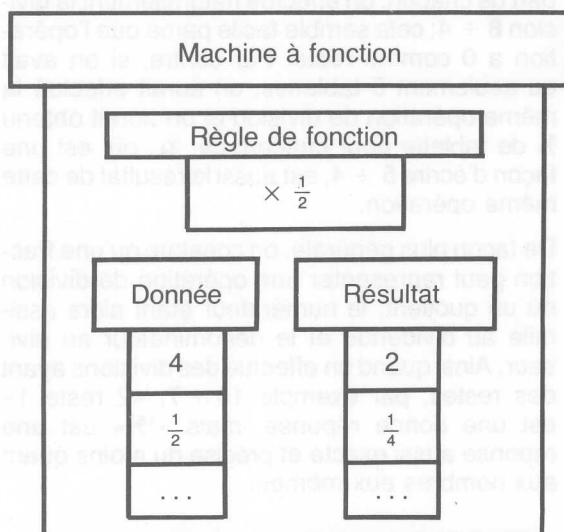


FIGURE 8

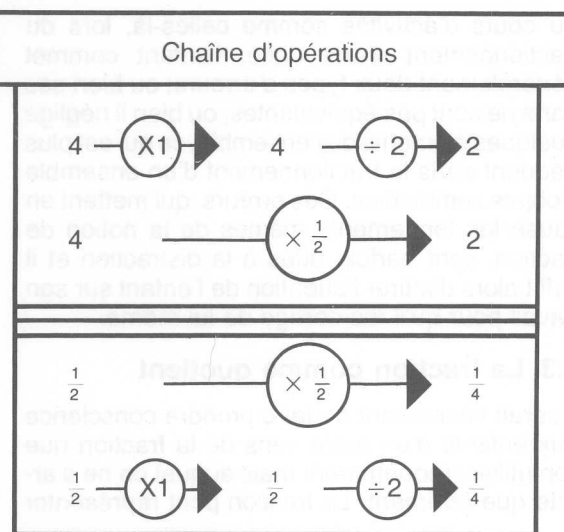


FIGURE 9

Dans les deux cas, la règle de fonction ou «l'opérateur» est :  $\times \frac{1}{2}$ ; il peut s'exprimer comme une succession de deux opérations, soit une division et une multiplication exprimées respectivement par le dénominateur et le numérateur. On peut évidemment avoir une règle de fonction ou un «opérateur» qui utilise un nombre entier ou une fraction. Cette démarche pédagogique a l'avantage de ramener tout calcul de fractions à une opération sur des nombres entiers.

Dans cette même ligne de pensée, il est important d'amener l'enfant à décomposer systématiquement une fraction en deux opérations. Cette décomposition simplifie grandement le problème posé par la compréhension du concept de fraction: elle permet de mieux saisir le sens du numé-

rateur et celui du dénominateur par analogie avec la multiplication et la division. En effet, si une multiplication défait ce que fait une division, il en est de même pour le numérateur et le dénominateur: le premier doit être assimilé à une multiplication et le deuxième, à une division. L'attention qu'on accordera à ces relations constituera un solide point d'appui pour la compréhension des opérations de multiplication et de division.

Il convient de faire d'abord effectuer ces opérations sur du matériel concret car c'est par ces manipulations que l'enfant enrichira sa compréhension en interprétant le dénominateur comme le partage d'une unité en parties égales, et le numérateur comme le nombre de parties qu'il faut regrouper.

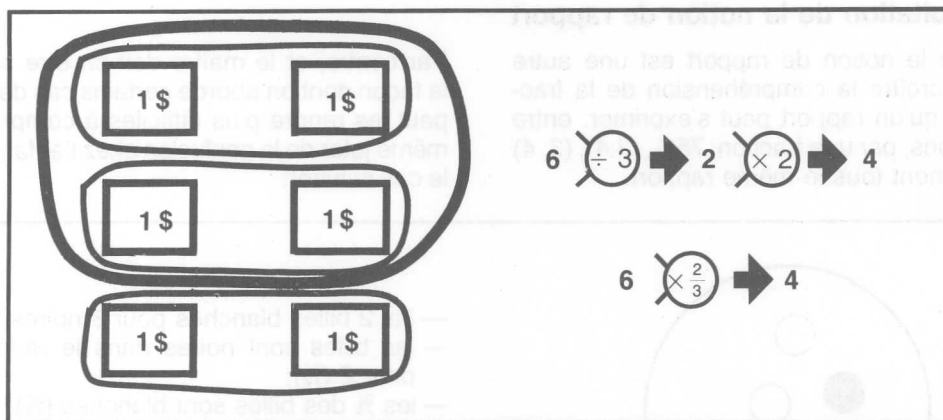


FIGURE 10

Ensuite, l'enfant peut travailler sur des représentations imagées de ce matériel; il peut, par exemple, se servir des figures géométriques usuelles qu'il divisera en parties égales. Il peut même effectuer ces opérations en utilisant une feuille

de papier et en effectuant les pliages nécessaires. La division (ou le dénominateur) correspond alors au partage de l'unité en un nombre de parties égales, et le numérateur indique combien de parties il faut regrouper.

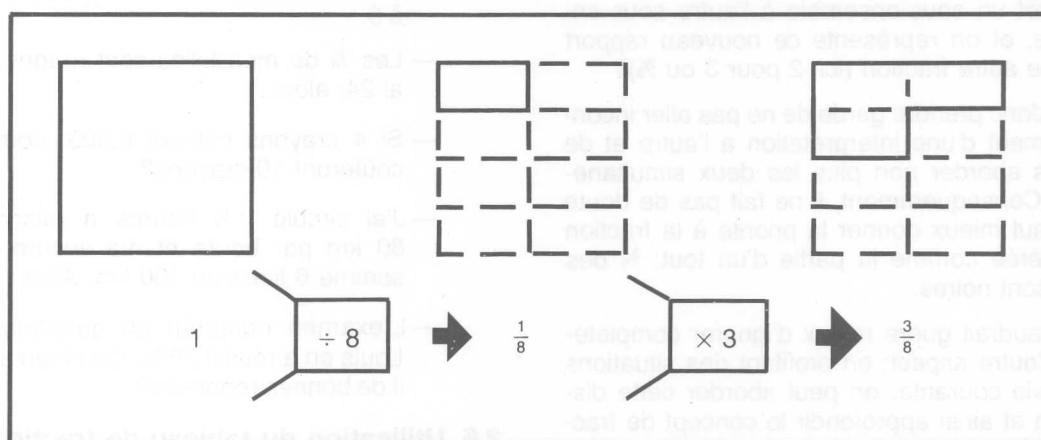


FIGURE 11

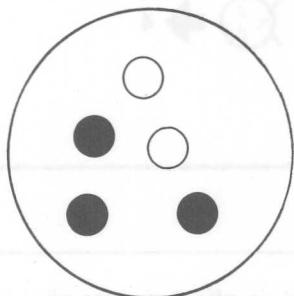
Ce n'est qu'après avoir bien compris ces étapes que l'enfant travaillera uniquement soit sur des nombres, soit sur des «chaînes d'opérateurs»; il sera alors amené à abstraire l'idée de fraction des manipulations qu'il aura effectuées. Les derniers exemples mettent aussi en évidence l'importance de l'ordre des opérations. Quand

l'enfant exécute des opérations concrètes ou semi-concrètes, quand il cherche à comprendre l'idée de fraction, il n'est nullement nécessaire de dire qu'on peut changer à volonté l'ordre des opérations de division et de multiplication même si, mathématiquement, ça donne toujours la même réponse.

## 2.5 Exploitation de la notion de rapport

L'étude de la notion de rapport est une autre façon d'accroître la compréhension de la fraction parce qu'un rapport peut s'exprimer, entre autres façons, par une fraction: 75%, (3:4), (3, 4) et  $\frac{3}{4}$  désignent tous le même rapport.

Par contre, et le maître doit en être conscient, la façon dont on aborde certains cas de rapports peut les rendre plus difficiles à comprendre, et même jeter de la confusion chez l'enfant. Voyons le cas suivant:



- j'ai 2 billes blanches pour 3 noires ( $\frac{2}{3}$ );
- les billes sont noires dans le rapport de 3 pour 2 ( $\frac{3}{2}$ );
- les  $\frac{2}{5}$  des billes sont blanches ( $\frac{2}{5}$ );
- les  $\frac{3}{5}$  des billes sont noires ( $\frac{3}{5}$ );
- j'ai des billes blanches et des billes noires dans un rapport de 2 à 3 (2:3);

Comment l'enfant peut-il comprendre que dans une même situation, on compare tantôt un groupe d'éléments à l'ensemble, et on représente alors le rapport par une fraction (ici:  $\frac{2}{5}$ ), et tantôt un sous-ensemble à l'autre sous-ensemble, et on représente ce nouveau rapport par une autre fraction (ici: 2 pour 3 ou  $\frac{2}{3}$ )?

Il faut donc prendre garde de ne pas aller inconsidérément d'une interprétation à l'autre et de ne pas aborder non plus les deux simultanément. Conséquemment, il ne fait pas de doute qu'il vaut mieux donner la priorité à la fraction considérée comme la partie d'un tout:  $\frac{2}{5}$  des billes sont noires.

Il ne vaudrait guère mieux d'ignorer complètement l'autre aspect; en profitant des situations de la vie courante, on peut aborder cette distinction et ainsi approfondir le concept de fraction. À force de rencontrer des situations semblables, l'enfant, à la fin de ses études primaires, est capable non seulement de résoudre les problèmes qu'elles posent, mais de plus il aime à le faire.

Il ne faut évidemment pas choisir les cas de rapport les plus complexes qui dépasseraient les capacités d'entendement des enfants. La construction et la lecture de graphiques constituent de bons moyens de visualiser un problème ou de l'examiner sous un angle nouveau.

Voici quelques cas de rapport accessibles à l'enfant de 11-12 ans:

- J'ai un sac de billes que je partage entre Jacques et Marie dans le rapport de 1 à 3.
- Les  $\frac{3}{4}$  de mes billes sont rouges; j'en ai 24, alors...
- Si 4 crayons coûtent 0,30\$; combien coûteront 10 crayons?
- J'ai circulé  $2\frac{1}{2}$  heures à raison de 80 km par heure et ma voiture consomme 6 litres au 100 km. Alors...
- L'examen comptait 60 questions et Louis en a réussi 75%. Combien avait-il de bonnes réponses?

## 2.6 Utilisation du tableau de fractions

Toujours dans le même esprit de tirer profit de l'environnement de l'enfant pour lui permettre de découvrir le concept de fraction, ou pourrait également traiter les fractions sous forme de couple de nombres. Les réglettes Cuisenaire ou tout autre matériel semblable constituant, à cet égard, un bon moyen de concrétiser la notion de fraction. Il suffit de choisir un bâtonnet; en le comparant à un autre pris comme unité, on détermine une fraction.

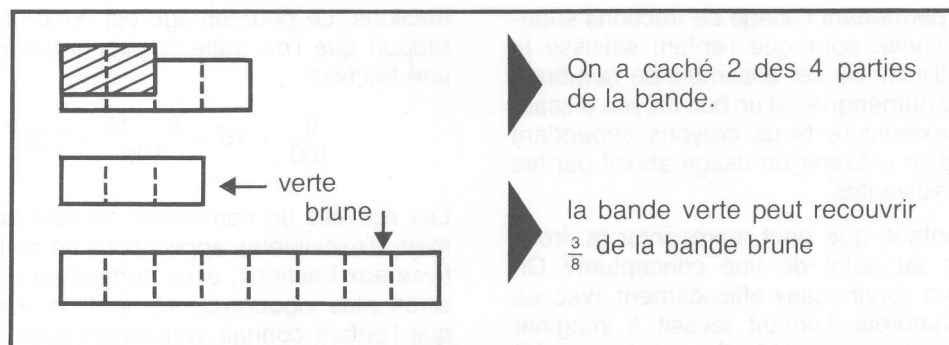


FIGURE 12

Avec le «tableau de fractions», on peut atteindre sensiblement le même objectif puisqu'on retrouve un peu le même principe qu'avec les réglettes. De plus, l'enfant peut utiliser ce procédé en se construisant du matériel ou même en

travaillant à partir d'illustrations; il devra cependant manipuler ce matériel avec une grande précision, sinon les résultats de ses opérations pourraient être faussés.

| UNITÉ          |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|----------------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| $\frac{1}{2}$  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $\frac{1}{4}$  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $\frac{1}{8}$  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $\frac{1}{3}$  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $\frac{1}{5}$  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $\frac{1}{10}$ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

FIGURE 13

Le plus souvent, le tableau de fractions s'arrête à une unité, ce qui comporte un certain inconvénient; ou pourrait tout aussi bien l'étendre à 2, 3 ou 4 unités. Ce défaut est moins important quand on utilise ce tableau pour l'un des objectifs suivants: comprendre la notion de fraction ( $\frac{1}{4}$  correspond à une partie sur quatre d'une unité préalablement choisie); concrétiser les valeurs respectives de deux fractions ( $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ ); comprendre le sens des opérations sur les fractions.

## 2.7 Utilisation de la droite numérique

Le tableau de fractions utilise des bandes de papier auxquelles on attribue arbitrairement la valeur d'une unité. Si on ajoutait côte à côte quelques unités, on obtiendrait quelque chose de très semblable à la droite numérique.

Le plus souvent, les quantités dont on se sert pour enseigner les fractions sont comprises entre zéro et un. Il convient donc d'exploiter les

situations permettant l'usage de fractions supérieures à l'unité pour que l'enfant saisisse le caractère illimité de cet ensemble de nombres. Or la droite numérique est un bon moyen d'assurer cette extension. Nous croyons cependant opportun d'en prévenir un usage abusif par les réflexions suivantes.

Pour un enfant, que peut représenter la droite numérique au point de vue conceptuel? On arrive à s'en servir assez efficacement avec les nombres naturels: l'enfant réussit à imaginer cette correspondance biunivoque entre cet ensemble de nombres et celui de points sur la droite. Peut-il établir les mêmes relations avec l'ensemble des nombres rationnels?

Parfois, on dit que le 1 est la distance entre le zéro et le un; à ce moment-là,  $\frac{1}{2}$  représente  $\frac{1}{2}$  de cette distance; cette transition est assez facile. Par contre, on dit aussi que le 1 n'est que le point situé à l'extrémité d'une distance unitaire; que peut alors représenter  $\frac{1}{2}$  dans la tête de l'enfant de neuf ou dix ans? On pourrait soulever ici le cas des opérations qu'on effectue souvent à partir de ce matériel.

Il faut donc s'en servir prudemment, sans exagération et surtout pas avant qu'une idée valable de la fraction ne se soit structurée chez l'enfant. Il faudrait en faire principalement un sujet d'exploration ou en favoriser un apprentissage de type intuitif.

## 2.8 Pourcentage

Le pourcentage est une catégorie particulière de rapports où la base de comparaison est 100: 10% signifie 10 par tranche de 100 ou dix pour chaque cent (10:100). Ainsi, tous les problèmes de pourcentage pourraient être traités comme une recherche de fractions équivalentes. Par exemple, pour trouver 8% de 15, ou pourrait dire: si j'ai 8 par tranche de 100, combien ai-je pour 15?

$$\frac{8}{100} = \frac{x}{15} \text{ ou } 8 : 100 = x : 15$$

Cependant, 10% est également une notation pour  $1\%$ ,  $\frac{1}{10}$  ou 0,1. La plupart des activités de commerce utilisent souvent des pourcentages que l'on peut ramener à une fraction simple (20%, 10%,  $33\frac{1}{3}\%$ , 50%, etc.). Chercher le pourcentage d'un nombre donné est habituellement considéré comme une opération impliquant des

fractions. Le pourcentage est donc un type de rapport que l'on traite le plus souvent comme une fraction:

$$\frac{8}{100} \times 15 = \frac{8 \times 15}{100} = 1,20$$

Les activités de commerce ne sont pas seulement d'excellentes applications de notions relatives aux fractions; elles permettent une acquisition plus vigoureuse de tout un vocabulaire que l'enfant connaît vaguement pour l'avoir vu à maintes reprises: rabais, solde, vente, réduction, taxe, intérêt, etc.

## 2.9 Probabilités

Le fascicule G sur les mesures traite, entre autres, des probabilités; il faudrait s'y référer pour une étude plus approfondie du sujet.

Nous désirons cependant rappeler que toute probabilité peut s'exprimer par une fraction sous la forme  $a/b$ ; d'ailleurs, la probabilité qu'un événement se produise ne se situe-t-elle pas entre 0 et 1?

«J'ai 1 chance sur 8 de gagner...»

$$\left( (1:8), \frac{1}{8}, 12,5\% \text{ ou } 0,125 \right)$$

«l'opération réussit dans 9 cas sur 10...»

$$\left( \frac{9}{10} \right)$$

Cependant, si une fraction illustre bien une probabilité, s'il est possible de trouver une probabilité équivalente à une autre de la même manière qu'on trouve une fraction équivalente, il faut être bien conscient qu'une fraction représentant une probabilité n'obéit pas nécessairement aux mêmes règles en ce qui concerne les opérations.

## Égalité et inégalité de fractions

### 3.1 Fractions équivalentes

Au point de vue mathématique, le nombre rationnel marque un rapport entre deux nombres entiers, rapport qui peut s'exprimer de diverses façons. Comme toute fraction exprime un rapport et que plusieurs rapports peuvent s'égaliser même s'ils sont exprimés au moyen de fractions différentes, un ensemble de fractions différentes exprimant le même nombre rationnel forment une classe d'équivalence et ces fractions sont dites équivalentes.

Percevoir le nombre rationnel comme une classe d'équivalence exige une capacité d'abstraction supérieure à celle de la moyenne des enfants. Aussi faut-il développer avant tout l'idée de fraction (voir chapitre 2) sans recourir au concept abstrait du nombre rationnel, lequel n'est pas strictement un objectif de l'enseignement mathématique à l'école primaire.

Par contre, l'enfant peut très bien comprendre que des fractions peuvent représenter une même quantité ou une même réalité, que des fractions peuvent être équivalentes; pour atteindre cet objectif, on peut placer l'enfant en situation d'observation d'un phénomène et de découverte de propriétés.

L'équivalence de deux fractions doit être quelque chose que l'élève construit, manipule, constate ou voit apparaître à partir d'une unité choisie au départ. Comme pour la compréhension de la notion de fraction, l'enfant peut découvrir la notion de fraction équivalente à l'aide de matériel concret: une feuille de papier, par exemple, permet de construire par découpage et par pliage l'égalité entre  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{2}{4}$  ou  $\frac{3}{6}$ .

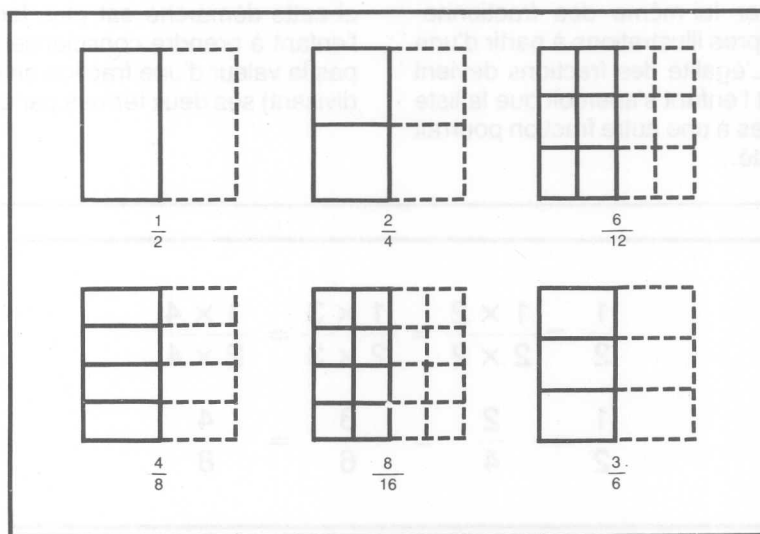


FIGURE 14

Le tableau de fractions que nous avons présenté au chapitre précédent est un autre matériel fort pertinent pour l'apprentissage de l'équivalence entre diverses fractions. L'enfant qui a déjà construit son tableau peut s'y référer pour comparer

deux ou plusieurs fractions; si l'observation à l'oeil n'est pas suffisante, l'enfant peut alors mesurer chacune à l'aide d'une bande de papier ou de toute autre unité de mesure.

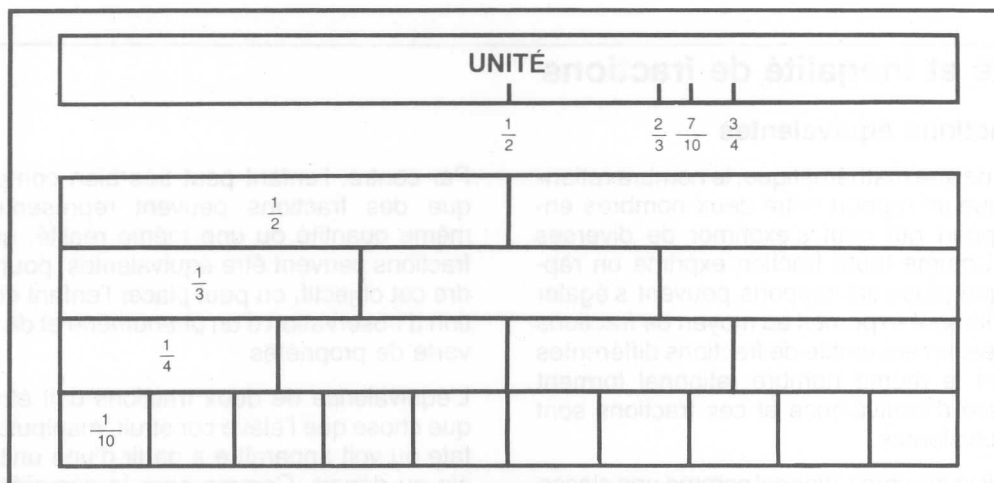


FIGURE 15

Ce type d'exercice est d'autant plus important qu'il permet de passer de la manipulation de matériel à une première forme de symbolisme. L'enfant doit pouvoir identifier une fraction à partir d'une illustration mais il doit également être capable d'effectuer lui-même des fractionnements sur ses propres illustrations à partir d'une fraction donnée. L'égalité des fractions devient alors apparente et l'enfant s'aperçoit que la liste des fractions égales à une autre fraction pourrait s'allonger à volonté.

La multiplication ou la division d'une fraction par un élément neutre pour ces opérations (1,  $\frac{2}{2}$ ,  $\frac{3}{3}$ , etc.) permet de construire un ensemble de ce que certains nomment les procédés d'amplification et de simplification de fractions. Même si cette démarche est plus formelle, elle incite l'enfant à prendre conscience qu'on ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant (ou en divisant) ses deux termes par un même nombre.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$$

FIGURE 16

De plus, le maître ne doit pas perdre de vue que la compréhension des fractions équivalentes (d'où la vérification de l'équivalence de deux fractions) et l'habileté à trouver des fractions équivalentes à une fraction donnée sont préa-

lables à la compréhension et à l'acquisition des algorithmes d'addition et de soustraction des fractions; il convient donc d'accorder aux exercices de transformation de deux fractions au même dénominateur tout le soin qu'ils méritent.

La transformation des fractions en notation décimale est également un excellent moyen de vérifier si deux fractions sont égales: ainsi  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{2}{4}$  sont égales puisqu'on les note toutes deux 0,5.

Enfin, en référence à la section 2.5, deux fractions considérées comme opérateurs sont équivalentes si elles produisent le même effet, ou, en d'autres mots, si elles représentent des «fonctions équivalentes».

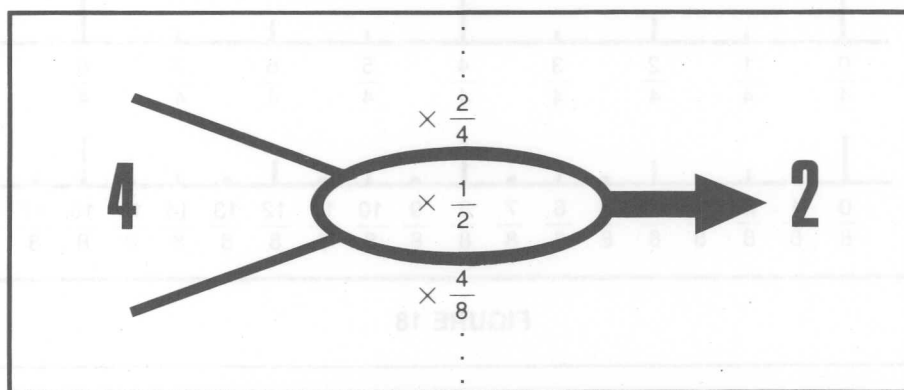


FIGURE 17

L'enfant découvre ainsi qu'il existe de grandes familles de fractions ayant la même valeur et que toutes les fractions de cet ensemble sont équivalentes. Pour représenter cet ensemble, on utilise habituellement la fraction ayant la plus simple expression, soit celle dont le numérateur et le dénominateur n'ont aucun facteur commun (autre que 1). Cependant, il ne faut pas oublier que chacune des fractions d'un ensemble de fractions équivalentes peut servir pour désigner tel ensemble; ainsi on peut dire «la classe d'équivalence  $\frac{1}{2}$ ».

Quand l'élève a compris comment deux fractions peuvent représenter la même quantité, on peut alors illustrer de différentes façons ce phénomène. La droite numérique est un bon outil à cet égard, d'autant plus qu'elle met les enfants en contact avec des fractions supérieures à l'unité; son utilisation comme moyen de représenter les fractions équivalentes permet aussi d'amorcer l'acquisition du concept de nombre rationnel, même si on ne le nomme pas spécifiquement; elle permet finalement d'établir un lien avec la mesure.

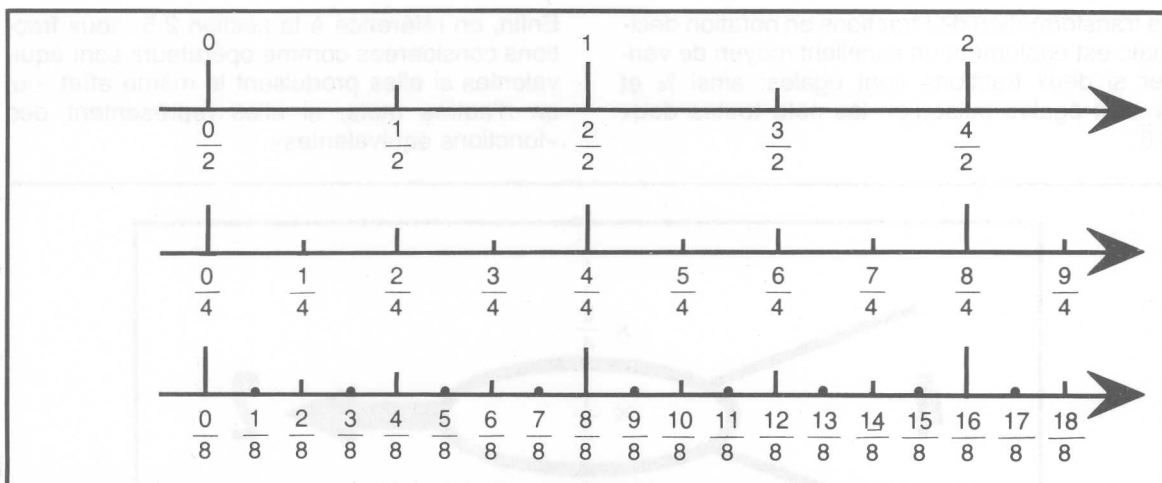


FIGURE 18

### 3.2 Comparaison de fractions

Rappelons d'abord que le concept de fractions équivalentes est un concept-clef tandis que l'habileté à déterminer laquelle de deux fractions est la plus petite ou la plus grande représente plutôt un objectif complémentaire. La comparaison de la valeur de deux fractions constitue en réalité un raffinement de la notion de fractions équivalentes, les situations où on applique cette habileté sont relativement rares tandis que les fractions équivalentes ouvrent la porte à d'autres apprentissages (ex. : les opérations d'addition et de soustraction). Il ne faut cependant pas négliger cette partie du programme qui, en plus de constituer un exercice valable et fort intéressant, favorise une meilleure compréhension de l'idée de fraction.

On peut mettre l'enfant aux prises avec la notion d'ordre dans les fractions dès qu'il aborde l'apprentissage des fractions équivalentes avec le tableau de fractions; en effet, lorsqu'il y découvre que deux fractions ne sont pas équivalentes, il observe automatiquement que l'une est plus petite ou plus grande que l'autre. Il n'est pas facile de comparer des fractions dont les dénominateurs sont des tiers, des quarts ou des dixièmes. Par contre, à l'aide de la figure 15 de la page 16, on observe facilement les inégalités suivantes:

$$\begin{array}{lcl} \frac{2}{3} & < & \frac{7}{10} \\ \frac{7}{10} & < & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & > & \frac{2}{3} \end{array}$$

La droite numérique est un autre moyen qui permet à l'enfant de saisir concrètement la valeur respective de deux fractions: dans les valeurs positives, par exemple, la fraction la plus grande est celle qui s'éloigne le plus du zéro. Il n'est cependant pas toujours facile de diviser avec exactitude un segment de droite en parties égales; il est donc important de ne pas en faire une utilisation abusive; de plus, il vaut mieux construire côte à côte plusieurs droites numériques ayant une même unité que de surcharger une même droite de plus d'un fractionnement.

Les premières comparaisons de fractions porteront évidemment sur des fractions ayant un même dénominateur: l'enfant aura vite observé que, plus le numérateur est grand, plus la fraction est grande. Dès lors, il cherchera naturellement à convertir les fractions à un même dénominateur et utilisera les procédés d'amplification et de simplification dont nous avons parlé à la section sur les fractions équivalentes. La transformation de deux fractions au même dénominateur est une des principales applications de la notion du «plus petit commun multiple» dont traite le fascicule sur les nombres naturels.

### 3.3 Activités complémentaires

Quand l'enfant a vraiment compris la notion d'égalité ou d'inégalité entre fractions, il peut développer ses habiletés en calcul. C'est ainsi

que pour vérifier l'équivalence de deux fractions, il sera amené à utiliser la technique qu'il est convenu d'appeler le «produit croisé», et qui

repose sur le principe qu'une équation demeure vraie si on multiplie ses termes par un même nombre.

|                                   |     |                                   |
|-----------------------------------|-----|-----------------------------------|
| $2 \times 10$                     | $=$ | $4 \times 5$                      |
| $(2 \times 10) \times 3$          | $=$ | $(4 \times 5) \times 3$           |
| tout comme                        |     |                                   |
| $\frac{3}{4}$                     | $=$ | $\frac{6}{8}$                     |
| $\frac{3}{4} \times (4 \times 8)$ | $=$ | $\frac{6}{8} \times (4 \times 8)$ |
| $3 \times 8$                      | $=$ | $4 \times 6$                      |

FIGURE 19

De façon plus formelle, on dit que deux fractions ( $\frac{3}{4}$  et  $\frac{6}{8}$ ) sont équivalentes si, et seulement si, les produits en diagonale de leurs termes sont égaux.

$$\begin{array}{ccc} 3 & \swarrow & 6 \\ 4 & \searrow & 8 \end{array}$$

$$3 \times 8 = 6 \times 4$$

Voici enfin cinq tableaux (pp. 20-21) qui permettent de repérer les fractions de même valeur; notons que ces tableaux sont des façons de disposer les nombres afin de mettre les fractions équivalentes en évidence, mais ils ne sont pas tous destinés à permettre aux élèves de mieux comprendre la notion de fractions équivalentes.

Les figures 20 et 23 présentent des tableaux fort semblables. Les fractions équivalentes apparaissent cependant plus clairement dans la première puisqu'elles sont situées sur une même ligne; la figure 23 à l'avantage de contenir potentiellement toutes les fractions. En fait, les points qui apparaissent à la figure 20 correspondent au coin supérieur droit de chaque fraction de la figure 23.

La figure 21 est un tableau de fractions semblable à celui dont nous avons déjà parlé. On pourrait le continuer à l'infini, mais il n'est pas nécessaire d'y représenter tous les nombres du déno-

minateur: on se limite habituellement aux premiers multiples de 2, 3 et 5. L'enfant peut y travailler avec des languettes de papier, des ficelles ou des règles à mesurer puisque deux fractions sont équivalentes si elles occupent le même espace depuis l'origine.

Dans la figure 22, la caractéristique des fractions équivalentes est de passer par un même point de la ligne verticale; on observe que plus une fraction s'approche de 1, plus elle s'éloigne vers le haut ou vers le bas, et qu'en fait, les fractions équivalentes à 1 ( $\frac{1}{1}$ ,  $\frac{2}{2}$ , etc.) déterminent autant de parallèles à la ligne verticale: c'est le sens du mot «limite» sur la figure.

La figure 24 est un tableau de multiples de 2 vers la droite et de 3 vers le bas; l'élève se construit des clés semblables à celles qui sont présentées au bas de la figure; placée n'importe où, une clé permet de lire des fractions équivalentes.

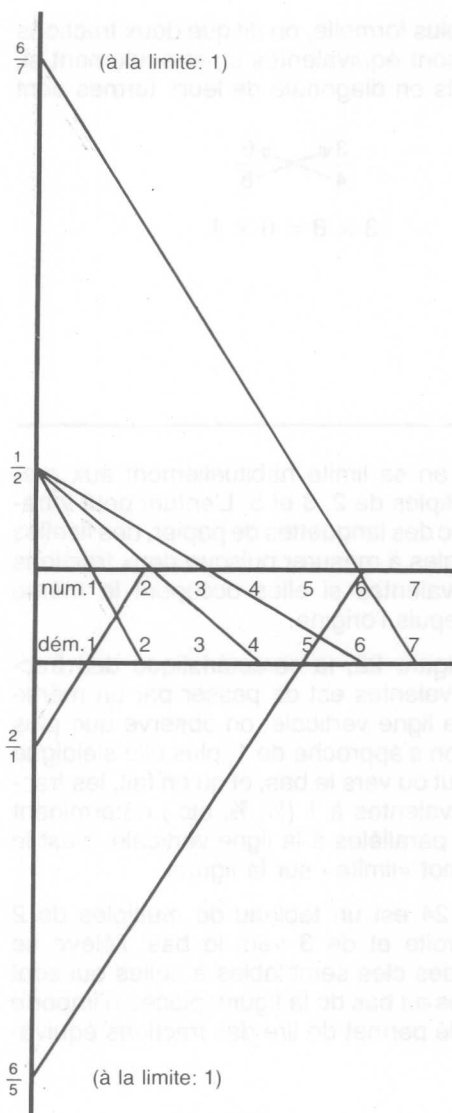


FIGURE 22

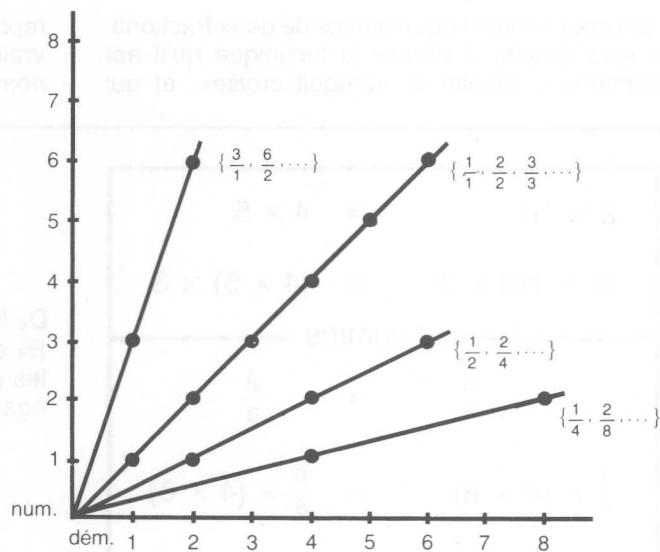


FIGURE 20

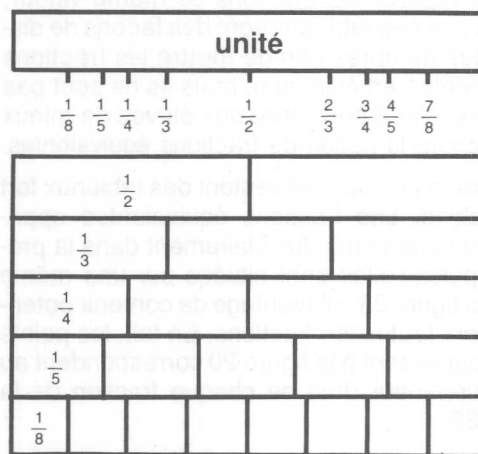


FIGURE 21

|               |               |               |               |               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\frac{6}{1}$ | $\frac{6}{2}$ | $\frac{6}{3}$ | $\frac{6}{4}$ | $\frac{6}{5}$ | $\frac{6}{6}$ | $\frac{6}{7}$ |
| $\frac{5}{1}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{5}{5}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{5}{7}$ |
| $\frac{4}{1}$ | $\frac{4}{2}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{4}{4}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{4}{6}$ | $\frac{4}{7}$ |
| $\frac{3}{1}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{3}{6}$ | $\frac{3}{7}$ |
| $\frac{2}{1}$ | $\frac{2}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{2}{7}$ |
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{7}$ |

FIGURE 23

|            |    |     |     |     |               |      |      |  |
|------------|----|-----|-----|-----|---------------|------|------|--|
| $\times 2$ |    |     |     |     |               |      |      |  |
| $\times 3$ | 1  | 2   | 4   | 8   | 16            | 32   | 64   |  |
|            | 3  | 6   | 12  | 24  | 48            | 96   | 192  |  |
|            | 9  | 18  | 36  | 72  |               | 288  | 576  |  |
|            | 27 | 54  | 108 | 216 | $\frac{2}{9}$ | 864  | 1728 |  |
|            | 81 | 162 | 324 | 648 | 1296          | 2592 | 5184 |  |
|            |    |     |     |     |               |      |      |  |

exemples de clés

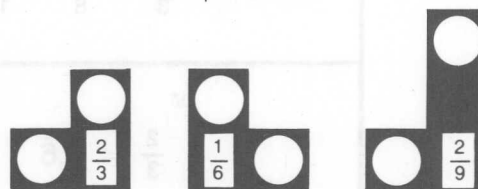


FIGURE 24

Il peut être également intéressant et enrichissant pour l'enfant d'ordonner des ensembles de fractions dont un ou les deux termes varient de façon régulière comme dans les exemples suivants:

- $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \dots$
- $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$
- $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$

De plus, comme la partie non entière d'un quotient peut être exprimée sous forme de fraction, sous forme de reste ou en notation décimale, l'observation des relations entre ces modes d'expression présente certainement un grand intérêt.

|             |       |                 |      |
|-------------|-------|-----------------|------|
| $5 \div 4$  | 1 R 1 | $1 \frac{1}{4}$ | 1,25 |
| $6 \div 4$  | 1 R 2 | $1 \frac{2}{4}$ | 1,5  |
| $7 \div 4$  | 1 R 3 | $1 \frac{3}{4}$ | 1,75 |
| $8 \div 4$  | 2 R 0 | 2               | 2,0  |
| $9 \div 4$  | 2 R 1 | $2 \frac{1}{4}$ | 2,25 |
| $10 \div 4$ | 2 R 2 | $2 \frac{2}{4}$ | 2,5. |

FIGURE 25

Finalement, on obtient une fraction décimale équivalente à une fraction «ordinaire» en divisant son numérateur par son dénominateur. Or, l'enfant apprend vite à comparer des fractions décimales parce qu'elles suivent la même structure de numération que les nombres naturels et parce qu'il les utilise fréquemment dans les mesures. La transformation d'une fraction en

notation décimale est donc un autre moyen pour l'enfant de saisir la comparaison de fractions. Il pourrait même utiliser une calculatrice pour effectuer cette transformation; cet appareil à l'avantage de mettre l'enfant en contact avec des fractions moins habituelles, ou inaccessibles sans cet outil.

|                                                                                                                   |                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| Placer les fractions suivantes en ordre croissant                                                                 |                                   |
| $\frac{2}{3}$ , $\frac{5}{8}$ , $\frac{11}{18}$ , $\frac{7}{11}$ , $\frac{7}{12}$ , $\frac{3}{5}$ , $\frac{4}{7}$ |                                   |
| or                                                                                                                |                                   |
| $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$                                                                                    | $\frac{7}{12} = 0,58\overline{3}$ |
| $\frac{5}{8} = 0,625$                                                                                             | $\frac{3}{5} = 0,6$               |
| $\frac{11}{18} = 0,6\overline{1}$                                                                                 | $\frac{4}{7} = 0,571\dots$        |
| $\frac{7}{11} = 0,6\overline{3}$                                                                                  |                                   |
| donc                                                                                                              |                                   |
| $\frac{4}{7} < \frac{7}{12} < \frac{3}{5} < \frac{11}{18} < \frac{5}{8} < \frac{7}{11} < \frac{2}{3}$             |                                   |

FIGURE 26

L'utilisation de la calculatrice dans une telle perspective est certainement susceptible d'enrichir la formation de l'enfant puisqu'il pourra plus facilement aborder d'autres types de problèmes. Par exemple, il peut chercher des régularités dans le développement décimal de fractions et, plus particulièrement, les cas spéciaux qui constituent les tiers, septièmes, neuvièmes et treizièmes.

mes. Il peut également résoudre des problèmes à solutions multiples comme celui de trouver plusieurs fractions qui soient comprises entre deux fractions données. Par exemple, peut-on trouver cinq fractions comprises entre  $\frac{2}{5}$  et  $\frac{1}{3}$ ? Comme  $\frac{2}{5} = 0,4$  et  $\frac{1}{3} = 0,3$ , on trouve facilement les solutions suivantes:

## Nombres décimaux

### 4.1 Importance des nombres décimaux

Il est important de souligner que les nombres décimaux sont utilisés dans de nombreux domaines de la vie courante. Ils sont utilisés pour mesurer des longueurs, des masses, des volumes, des températures, etc. Ils sont également utilisés pour représenter des fractions de nombres entiers. Les nombres décimaux sont donc des outils essentiels pour la mesure et le calcul.

Les nombres décimaux sont utilisés dans de nombreux domaines de la vie courante. Ils sont utilisés pour mesurer des longueurs, des masses, des volumes, des températures, etc. Ils sont également utilisés pour représenter des fractions de nombres entiers. Les nombres décimaux sont donc des outils essentiels pour la mesure et le calcul.

Chaque fois que l'on mesure une longueur, une masse, un volume, une température, etc., on utilise des nombres décimaux. Les nombres décimaux sont donc des outils essentiels pour la mesure et le calcul. Ils sont également utilisés pour représenter des fractions de nombres entiers.

Malgré ces considérations, il est remarquable que les nombres décimaux n'ont pas toujours été utilisés de manière systématique. C'est seulement au cours du XIX<sup>e</sup> siècle que les nombres décimaux ont commencé à être utilisés de manière systématique.

Enfin, il est important de souligner que les nombres décimaux sont utilisés dans de nombreux domaines de la vie courante. Ils sont utilisés pour mesurer des longueurs, des masses, des volumes, des températures, etc. Ils sont également utilisés pour représenter des fractions de nombres entiers.

### 4.2 Fractions décimales

Les fractions décimales constituent une classe particulière de fractions. Elles sont définies comme des fractions dont le dénominateur est une puissance de 10.

$$0,34 = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}$$

$$0,35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$$

$$0,36 = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$$

$$0,37 = \frac{37}{100}$$

$$0,38 = \frac{19}{50}$$

$$0,344 = \dots$$

### 4.3 Notation décimale

La notation décimale est une manière de représenter des fractions. Elle est basée sur le système de numération décimale. Les nombres décimaux sont notés avec une virgule décimale. Les chiffres à gauche de la virgule représentent la partie entière, et les chiffres à droite de la virgule représentent la partie décimale.

La notation décimale est une manière de représenter des fractions. Elle est basée sur le système de numération décimale. Les nombres décimaux sont notés avec une virgule décimale. Les chiffres à gauche de la virgule représentent la partie entière, et les chiffres à droite de la virgule représentent la partie décimale.

$$\begin{aligned} 0,34 &= \frac{34}{100} \\ 0,35 &= \frac{35}{100} \\ 0,36 &= \frac{36}{100} \end{aligned}$$

Il faut alors présenter la notation décimale de manière claire et concise. Les nombres décimaux sont notés avec une virgule décimale. Les chiffres à gauche de la virgule représentent la partie entière, et les chiffres à droite de la virgule représentent la partie décimale.

## Nombres décimaux

### 4.1 Importance des nombres décimaux

Nous avons vu précédemment qu'un nombre rationnel peut s'écrire sous forme de couple, en notation décimale ou en pourcentage; selon le type de situations que l'on rencontre, l'un ou l'autre de ces symbolismes est utilisé, chacun comportant ses champs d'application et ses avantages.

Le programme précise qu'un fort accent doit être mis sur les nombres décimaux d'autant plus que le Québec a maintenant adopté le Système international d'unités de mesure; si, auparavant, on rencontrait les nombres décimaux surtout dans les activités de commerce ou les fractionnements de gallons d'essence, ils sont aujourd'hui implantés dans tous les secteurs de notre environnement.

Chacun des fascicules du guide pédagogique traite d'un des thèmes du programme et, dans ce fascicule-ci, les nombres rationnels écrits sous la forme décimale occupent un chapitre particulier. L'enseignement n'est heureusement pas si morcelé et l'apprentissage des nombres décimaux pourrait être plus également réparti le long de l'enseignement primaire, se débarrassant ainsi du caractère marginal ou occasionnel qui l'a longtemps marqué.

Malgré ces considérations, il est vraisemblable que les nombres décimaux n'élimineront jamais les fractions du type  $a/b$ , et il existe des situations où l'utilisation des algorithmes de calcul est plus pratique et plus simple avec des fractions sous forme de couple qu'avec des fractions en notation décimale. (ex.: opération de division, expression d'une probabilité, etc.)

Finalement, exception faite d'activités spécifiques concernant la recherche de régularités, on ne devrait pas dépasser l'ordre des millièmes au cours de l'apprentissage des nombres décimaux. Pour les nombres décimaux illimités, il suffit de considérer les trois premières décimales, d'une précision habituellement suffisante.

### 4.2 Fractions décimales

Les fractions décimales constituent une classe particulière de fractions où le dénominateur est composé de dixièmes, de centièmes ou de mil-

lièmes. Cette expression désigne une écriture différente de la notation décimale (ex.: 0,4) où les chiffres prennent une valeur selon un système de numération positionnelle. L'apprentissage des nombres décimaux doit reposer sur une bonne compréhension des fractions décimales ( $\% = 0,4$ ).

Il est donc important de multiplier les activités permettant à l'enfant de mieux maîtriser ce sous-ensemble de fractions. Ces activités pourraient même s'incorporer à celles qui sont prévues pour l'apprentissage des fractions: on pourrait, par exemple, transformer les fractions simples qui s'y prêtent en fractions décimales puisqu'il s'agit là d'un cas particulier de recherche de fractions équivalentes.

### 4.3 Notation décimale

L'expression d'une fraction dans sa notation décimale s'effectue généralement sans difficulté parce que cette conversion repose sur le système de numération appris lors de l'apprentissage des nombres naturels. Pour faciliter ce passage, on peut utiliser deux types d'approches à la fois distinctes et complémentaires. Ou bien l'on développe une approche s'appuyant sur l'esprit déductif de l'enfant, ou bien l'on amène ce dernier à induire les notions sous-jacentes à la notation décimale d'une fraction.

Dans le premier cas, il convient de revoir les principes de la numération dans les nombres naturels et de présenter ensuite l'écriture des nombres décimaux comme une extension de la première.

$$\begin{aligned} 8 \times 10 &= 80 \\ 8 \times 1 &= 8 \\ 8 \times \frac{1}{10} &= 0,8 \end{aligned}$$

Il faut alors présenter le rôle de la virgule comme celui d'un pont, d'une barrière ou d'une limite entre deux parties d'un même nombre, soit entre sa partie entière et sa partie fractionnaire. Ainsi 0,8 représente et se lit zéro entier et huit dixièmes. La décomposition d'un nombre en puissances de dix, qui a été utilisée pour les nombres naturels, devient ici une aide précieuse dans cette approche puisqu'elle illustre bien l'aspect

«extension» de la numération des nombres décimaux.

$$\begin{aligned} 123 &= (1 \times 100) + (2 \times 10) + (3 \times 1) \\ 123,45 &= (1 \times 100) + (2 \times 10) + (3 \times 1) + \\ &\quad (4 \times \frac{1}{10}) + (5 \times \frac{1}{100}) \end{aligned}$$

Pour le deuxième modèle, qui est plutôt de type inductif, il s'agit de présenter à l'enfant un éventail, le plus grand possible, de situations où l'on rencontre les nombres décimaux. De l'observation et de l'analyse de ces exemples, l'enfant est amené à induire les principes et modalités de l'écriture des nombres décimaux:

- \* tel objet coûte 1,25 \$;
- \* à sa naissance, le bébé pesait 3,970 kg;
- \* en partageant un dollar entre quatre personnes, chacun reçoit vingt-cinq cents (0,25 \$);
- \* la taille moyenne des élèves d'une classe est de 1,35 m;
- \* tel coureur a gagné la course avec un temps de 10,535 s;

#### 4.4 Division de deux nombres naturels

Nous avons surtout traité jusqu'ici les fractions que l'on peut transformer exactement en fractions décimales. Pour les fractions qui ont un développement décimal illimité, il convient de n'utiliser que les trois premières décimales qui en fournissent une approximation relativement précise. Ainsi, on peut écrire  $\frac{1}{3} = 0,333$ , si on accepte que  $\frac{333}{999}$  est approximativement égal à  $\frac{333}{1000}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{333}{999} \\ \frac{333}{999} &\approx \frac{333}{1000} \\ \frac{333}{1000} &\approx 0,333 \end{aligned}$$

Nous avons vu précédemment qu'une fraction sous la forme  $a/b$  peut exprimer l'opération de division de son numérateur par son dénominateur. L'enfant comprend vite cette notion quand l'opération s'effectue sans reste, comme dans  $\frac{1}{2} = (4 \div 2) = 2$ . Par contre, il sera sceptique si on lui présente un cas où la division compte un reste; il serait alors avantageux de l'amener à exprimer tout reste d'une division sous la forme décimale.

$$\begin{array}{r} 3,000 \overline{) 8} \\ 24 \phantom{00} \\ \hline 60 \\ 56 \phantom{00} \\ \hline 40 \\ 40 \phantom{00} \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1,000 \overline{) 6} \\ 6 \phantom{00} \\ \hline 40 \\ 36 \phantom{00} \\ \hline 40 \\ 36 \phantom{00} \\ \hline 4 \end{array}$$

3 décimales, on néglige le dernier reste.

À quelques reprises, nous avons utilisé comme exemple des huitièmes. Il existe quelques fractions simples comme celles-là dont il est intéressant d'observer la transformation en notation décimale et nul doute que l'enfant a grand avantage à mémoriser certaines de ces équivalences.

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} &= 0,125 = 12,5\% \\ \frac{2}{8} &= \frac{1}{4} = 0,25 = 25\% \\ \frac{1}{3} &= 0,333 = 33 \frac{1}{3}\% \\ \frac{3}{8} &= 0,375 = 37,5\% \\ \frac{4}{8} &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,50 = 50\% \end{aligned}$$

## Opérations sur les fractions

### 5.1 Notion d'opération

Au cours de son apprentissage des nombres naturels, l'enfant aura été amené à comprendre le sens d'une opération mathématique à partir de maintes manipulations et explorations. Sans reprendre à ce sujet le contenu du fascicule C, sur les nombres naturels, il nous apparaît important de préciser qu'au cours de son initiation au calcul, l'enfant devra avoir établi la relation entre une opération concrète et une opération mathématique.

Or, les expériences concrètes, qui auront appuyé l'acquisition du concept d'opération par rapport à l'ensemble des nombres naturels, faciliteront grandement l'apprentissage des opérations avec un autre ensemble de référence, celui des nombres rationnels. Ici, l'enfant pourra concentrer le gros de ses efforts dans la pratique des opérations comportant des fractions. Il devra découvrir, comprendre et assimiler les règles qui lui permettront d'effectuer des opérations; en d'autres termes, il devra «apprendre, après justification de toutes les démarches, à procéder d'une certaine façon pour s'assurer que les résultats seront bons» (1).

Au chapitre 2, nous avons insisté sur l'importance de présenter la fraction comme un nombre transformable par une opération. Nous verrons, dans ce chapitre, les difficultés particulières de chaque opération, compte tenu du fait que l'emphase sera mise sur le «comment résoudre» un problème du type de  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ .

### 5.2 Addition et soustraction

L'addition et la soustraction de fractions sont deux opérations dont l'enfant comprend facilement le sens, sans doute par analogie avec les nombres naturels: deux nombres représentant des quantités quelconques (en l'occurrence, au moins un des nombres sera non entier) peuvent s'ajouter l'un à l'autre pour déterminer un troisième nombre. La soustraction, quant à elle, suppose la réversibilité de cette opération.

La meilleure situation pédagogique, on l'admettra facilement, est celle qui permet à l'enfant de découvrir par lui-même les notions et algorithmes sous-tendus par une opération. Pour l'addition ou la soustraction, quelles méthodes permettront le meilleur apprentissage?

Il convient certes de commencer avec des additions de nombres naturels et d'ajouter progressivement des éléments moins connus. L'addition d'un nombre naturel et d'une fraction ne pose généralement pas de difficulté, pas plus que l'addition de deux fractions ayant une même dénominateur; pour ces cas simples, l'enfant aura naturellement découvert les règles avant même de se mesurer à ces opérations à l'école.

(1) MIALARET, Gaston. *L'apprentissage des mathématiques*. Dessart, Bruxelles, 1967, p.65.

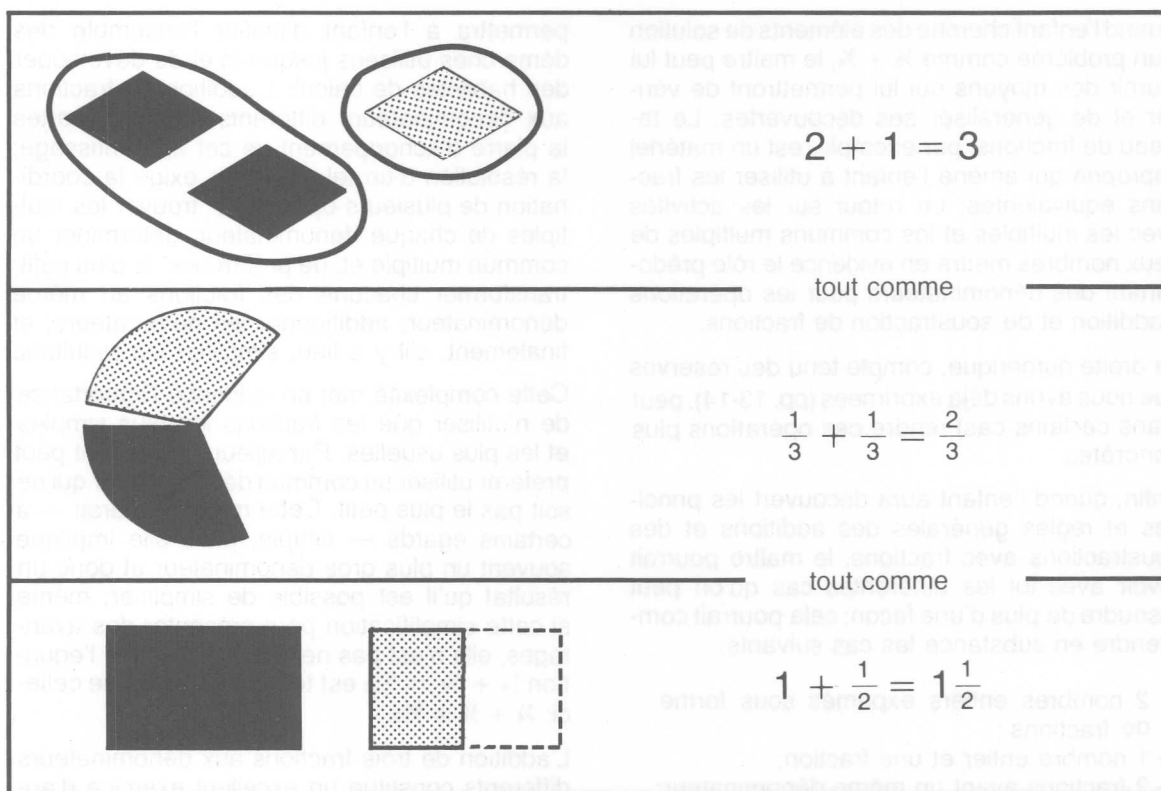


FIGURE 27

On peut amener l'enfant à effectuer des opérations de fractions à partir d'un matériel ordinaire, d'illustrations. Même s'il ne quantifie pas avec exactitude le résultat de cette opération, il ob-

serve alors qu'il peut éventuellement obtenir un résultat qui dépasse l'unité, et que tout problème possède une solution.

Cette bande vaut 1 unité

Dessine une bande qui sera équivalente

à  $\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$  .

à  $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$  .

à  $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$  .

FIGURE 28

Quand l'enfant cherche des éléments de solution à un problème comme  $\frac{1}{3} + \frac{3}{4}$ , le maître peut lui fournir des moyens qui lui permettront de vérifier et de généraliser ses découvertes. Le tableau de fractions, par exemple, est un matériel approprié qui amène l'enfant à utiliser les fractions équivalentes; un retour sur les activités avec les multiples et les communs multiples de deux nombres mettra en évidence le rôle prédominant des dénominateurs pour les opérations d'addition et de soustraction de fractions.

La droite numérique, compte tenu des réserves que nous avons déjà exprimées (pp. 13-14), peut (dans certains cas) rendre ces opérations plus concrètes.

Enfin, quand l'enfant aura découvert les principes et règles générales des additions et des soustractions avec fractions, le maître pourrait revoir avec lui les différentes cas qu'on peut résoudre de plus d'une façon; cela pourrait comprendre en substance les cas suivants:

- 2 nombres entiers exprimés sous forme de fractions;
- 1 nombre entier et une fraction;
- 2 fractions ayant un même dénominateur;
- 2 fractions ayant des dénominateurs différents mais dont l'un est un multiple de l'autre;
- 2 fractions dont les dénominateurs n'ont pas de facteur en commun sauf 1:

$$\begin{array}{l} * \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} ; \\ * \quad \frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} ; \\ * \quad 1\frac{1}{3} + 2\frac{1}{4} ; \end{array}$$

Cette revue des différents cas (qui ne sont pas nécessairement en ordre de difficulté croissante)

permettra à l'enfant d'unifier l'ensemble des démarches utilisées jusque-là et de développer des habiletés de calcul. L'addition de fractions aux dénominateurs différents constitue certes la pierre d'achoppement de cet apprentissage; la résolution d'un tel problème exige la coordination de plusieurs opérations: trouver les multiples de chaque dénominateur; déterminer un commun multiple et, de préférence, le plus petit; transformer chacune des fractions au même dénominateur; additionner les numérateurs, et finalement, s'il y a lieu, simplifier les résultats.

Cette complexité met en évidence l'importance de n'utiliser que les fractions les plus simples et les plus usuelles. Par ailleurs, un enfant peut préférer utiliser un commun dénominateur qui ne soit pas le plus petit. Cette méthode paraît — à certains égards — simple, mais elle implique souvent un plus gros dénominateur et donc un résultat qu'il est possible de simplifier; même si cette simplification peut présenter des avantages, elle n'est pas nécessaire puisque l'équation  $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{10}{24}$  est tout aussi juste que celle-ci:  $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$ .

L'addition de trois fractions aux dénominateurs différents constitue un excellent exercice d'application des méthodes de calcul et des notions acquises; il s'agit aussi d'une bonne occasion de mettre en évidence les propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition.

Finalement, les soustractions de nombres fractionnaires ( $3\frac{1}{3} - \frac{5}{6}$ ) comportent parfois des difficultés et méritent qu'on leur accorde un peu d'attention. On pourrait profiter de l'occasion pour transformer les termes en expressions fractionnaires, et, s'il y a lieu, l'expression fractionnaire du résultat en nombre fractionnaire, comme dans l'exemple suivant.

$$\begin{aligned} 8\frac{1}{4} - 5\frac{3}{4} &= \frac{33}{4} - \frac{23}{4} \\ &= \frac{10}{4} \\ &= 2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Il ne s'agit pas pour autant d'éliminer systématiquement les soustractions qui comportent des emprunts; l'un et l'autre procédé constituent des approches complémentaires qui enrichissent la formation de l'élève.

### 5.3 Multiplication

Encore une fois, nous croyons qu'il convient d'établir l'analogie entre les nombres naturels et les nombres rationnels en ce qui concerne la multiplication. C'est le même principe mathématique puisque deux nombres sont reliés par une fonction (opération) et produisent un autre nombre. De plus, quand on la représente graphiquement ou qu'on l'applique à une situation concrète, on observe que les deux facteurs ne jouent pas le même rôle selon qu'ils sont multiplicateur ou multiplicande.

En fait, c'est toujours la même dualité entre le modèle physique et le modèle mathématique d'une opération; cette apparente opposition

permet cependant de développer certains procédés susceptibles de renforcer chez l'enfant la notion de fraction.

Le langage est un élément qui peut dénouer le dilemme et faciliter l'apprentissage de cette opération. Ainsi, il est plus facile de comprendre le sens de:

- «les trois quarts de 12» que ( $\frac{3}{4} \times 12$ )
- «quelle est la moitié de  $\frac{1}{4}$ » que ( $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ )

Il est donc important d'amener l'enfant à décrire verbalement les opérations qu'il doit effectuer.

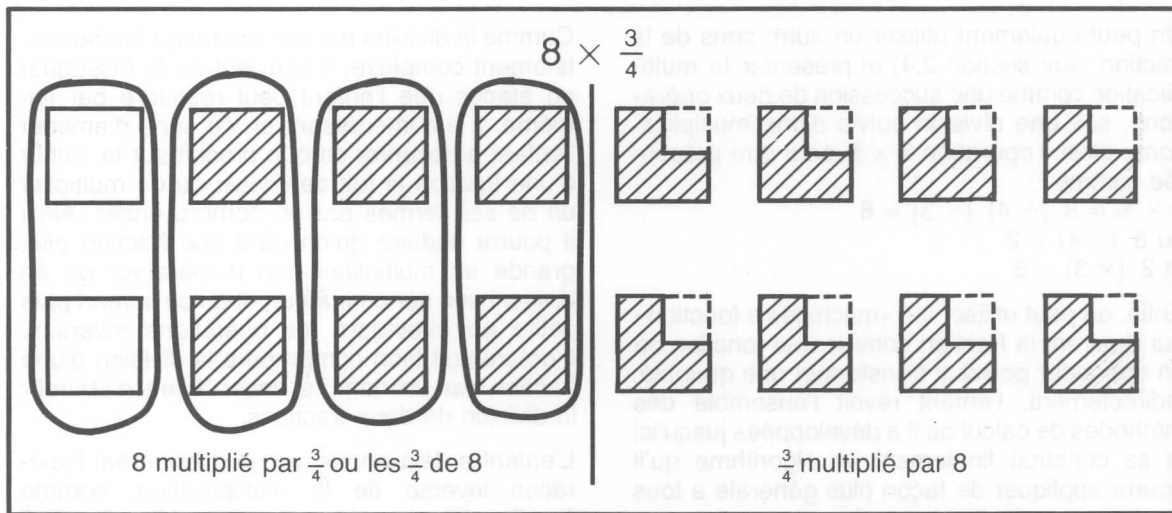


FIGURE 29

Le tableau de fractions, dont nous avons déjà parlé, est un autre procédé qui permet d'accroître la compréhension et la pratique de la multiplication bien que cela exige une grande pré-

cision en ce qui concerne sa manipulation. Il s'agit là d'une activité semblable à celle qui consiste à effectuer des pliages successifs sur une feuille de papier choisie comme unité.

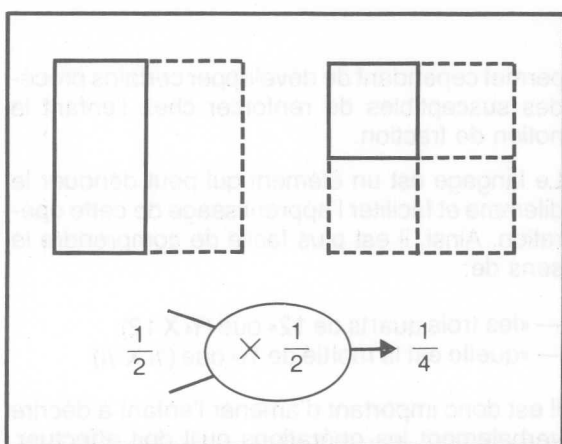


FIGURE 30

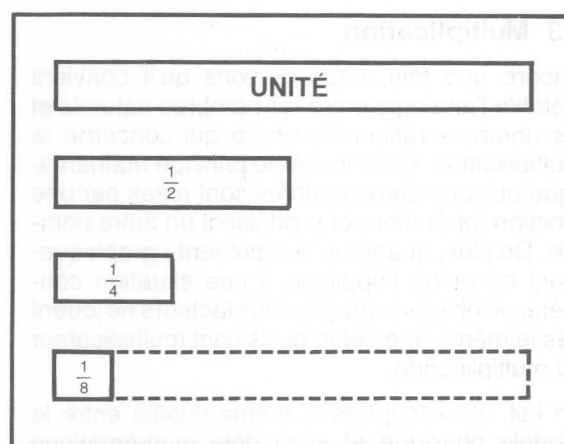


FIGURE 31

On peut également utiliser un autre sens de la fraction (voir section 2.4) et présenter la multiplication comme une succession de deux opérations; ainsi, l'opération  $8 \times \frac{3}{4}$  peut être présentée comme

$$8 \times \frac{3}{4} = 8 (\div 4) (\times 3) = 6$$

$$\text{ou } 8 (\div 4) = 2$$

$$\text{et } 2 (\times 3) = 6$$

Enfin, on peut utiliser les «machines à fonction» qui illustrent la fraction comme une fonction ou un opérateur pouvant transformer une quantité; indirectement, l'enfant revoit l'ensemble des méthodes de calcul qu'il a développées jusqu'ici et se construit finalement un algorithme qu'il pourra appliquer de façon plus générale à tous les cas de multiplication.

$$\frac{3}{4} \times \frac{8}{1}; \left(\frac{3}{4} \times\right) \frac{1}{2}; \frac{2}{1} \times \frac{1}{4}$$

#### 5.4 La division comme opération inverse de la multiplication

La division de fraction représente un cas particulier en ce sens qu'on n'en facilite guère la compréhension en la présentant comme une soustraction successive. On ne peut donc établir qu'avec prudence l'analogie avec les nombres naturels. Quelle que soit notre démarche pédagogique en classe, la division de fractions demeure une opération difficile à concrétiser et dont le résultat n'est pas évident dans tous les cas.

Comme la division est une opération fondamentalement complexe, il convient de la disséquer en étapes que l'enfant peut résoudre par lui-même. Il est intéressant en ce sens d'amener l'enfant à observer ce que produit sur la valeur d'une fraction le fait de diviser ou de multiplier un de ses termes par un nombre entier. Ainsi il pourra déduire qu'on rend une fraction plus grande en multipliant son numérateur ou en divisant son dénominateur, et qu'on la rend plus petite en effectuant les opérations inverses. L'enfant doit bien comprendre la division d'une fraction par un nombre entier avant d'aborder la division de deux fractions.

L'enfant a déjà appris que la division est l'opération inverse de la multiplication: comme  $5 \times 2 = 10$ , alors  $10 \div 5 = 2$  ou  $10 \div 2 = 5$ . Il convient certainement de s'appuyer sur ces notions acquises et de demander à l'élève de faire l'opération inverse de  $5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$ ; il pourra trouver que  $\frac{10}{3} \div 5 = \frac{2}{3}$  ou que  $\frac{10}{3} \div \frac{2}{3} = 5$ .

Cette découverte, en apparence simple, contient cependant tous les éléments qui permettront à l'enfant de découvrir et de comprendre les mécanismes de calcul de cette opération complexe. Il ne faut d'ailleurs pas se leurrer car pas plus l'élève de l'enseignement secondaire ou collégial que l'enfant de l'école primaire, et en réalité pas plus que l'adulte, n'arrivent facilement à comprendre toute l'abstraction de cette opération.

On peut ensuite suggérer à l'enfant de reprendre son travail en changeant 5 par son équivalent  $\frac{2}{3}$ : il aura alors  $\frac{5}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

$$\text{donc } 10/3 \div 5/1 = 2/3$$

$$\text{et } 10/3 \div 2/3 = 5/1 = 5$$

L'enfant aura alors sous les yeux les fondements de l'algorithme de division même s'il n'a utilisé jusque-là que des notions qu'il possédait déjà. Guidé par le maître, il lui faudrait revoir les mêmes notions avec des exemples simples, illustrer ou décrire l'opération demandée afin d'en mieux saisir le sens; ainsi calculer  $(1 \div \frac{1}{4})$  équi-

vaut à chercher combien de fois un quart de feuille entre dans une feuille complète.

L'enfant aura finalement trouvé une méthode de calcul qui ne sera pas nécessairement la même que celle de son voisin et qui peut même ne pas constituer une règle générale. Il est donc avantageux que maître et élèves revoient ensemble les différents cas de division et les algorithmes possibles. En terminant ce chapitre, nous présentons les trois principaux algorithmes qui permettent de résoudre une division de fraction.

Division terme à terme: au besoin, on trouve une fraction équivalente à  $\frac{2}{3}$  qui permette les 2 divisions.

$$\begin{array}{ccc} \frac{3}{5} \div \frac{2}{3} & \longrightarrow & \frac{6}{10} \div \frac{2}{3} \\ \frac{6}{10} \div \frac{2}{3} & \longrightarrow & \frac{18}{30} \div \frac{2}{3} \\ \frac{18}{30} \div \frac{2}{3} & = & \frac{9}{10} \end{array}$$

On ramène les deux fractions au même dénominateur, qu'on ramène ensuite à 1; on exprime la division des deux numérateurs sous forme de rapport.

$$\begin{aligned} \frac{4}{5} \div \frac{2}{3} &= \frac{12}{15} \div \frac{10}{15} \\ &= \frac{12 \times 15}{15} \div \frac{10 \times 15}{15} \\ &= 12 \div 10 \\ &= \frac{12}{10} \text{ ou } \frac{6}{5} \end{aligned}$$

On multiplie la première fraction par l'inverse de la deuxième.

$$\begin{aligned} \frac{4}{5} \div \frac{2}{3} &= \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{12}{10} \\ &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

## Opérations sur les nombres décimaux

### 6.1 Égalité et inégalité de nombres décimaux

Quand on aborde cette notion, il suffit de rappeler à la plupart des enfants la numération avec les nombres naturels; d'autres sont embarrassés par la comparaison de deux nombres n'ayant pas le même nombre de décimales. Il

faut alors revenir sur le rôle des «0» dans les nombres naturels pour ensuite permettre aux enfants d'extrapoler en appliquant leurs observations aux nombres rationnels.

| placer le signe<br>qui convient |       |   |        |
|---------------------------------|-------|---|--------|
|                                 | 410   | ○ | 410,00 |
|                                 | 345,6 | ○ | 34,56  |
| <                               |       |   |        |
| =                               | 23    | ○ | 23,001 |
| >                               |       |   |        |
|                                 | 2,4   | ○ | 2,40   |
|                                 | 3,19  | ○ | 3,2    |
|                                 | 1,22  | ○ | 1,190  |
|                                 | 2,002 | ○ | 2,1    |
|                                 | 0,2   | ○ | 0,201  |

FIGURE 32

Afin d'attirer l'attention de l'enfant sur la valeur de position, on peut lui demander de décomposer les nombres en puissances de dix ou, plus simplement, d'amener tous les nombres à une même quantité de décimales en ajoutant des «0» au besoin.

$$0,191 < 0,2 \quad \text{car} \quad 0,191 < 0,200$$

Soulignons, enfin l'intérêt qu'il y a à partir de cas simples et de graduer les difficultés pour finalement comparer des nombres dont la notation se ressemble; ces activités attirent l'attention sur la structure de la valeur positionnelle et accroissent ainsi la compréhension de la numération décimale en général.

### 6.2 Addition et soustraction

Dès que l'enfant a compris qu'on utilise une virgule pour séparer la partie entière de la partie fractionnaire d'un nombre, il découvre à l'aide de situations simples et concrètes qu'il faut aligner les unités pour effectuer une addition ou une soustraction. L'algorithme n'est alors qu'une

extension du calcul sur les nombres naturels; aussi nous ne traiterons que très brièvement de ces opérations.

Il faut tendre dans la mesure du possible à relier ces apprentissages au vécu de l'enfant en faisant intervenir des unités de mesure, de monnaie, etc. L'estimation des résultats joue un rôle important dans la compréhension de ces opérations car, en essayant de déterminer l'ordre de grandeur du résultat, l'enfant doit obligatoirement distinguer la partie entière de la partie fractionnaire des nombres en présence. Dans l'exemple  $13,4 \text{ m} + 3,56 \text{ m} = \underline{\hspace{2cm}}$ , l'enfant qui suggère 48 m comme estimation a négligé la virgule puisque la réponse ne dépassera 16 que de quelque peu ( $13 + 3$ ).

Si les algorithmes d'addition et de soustraction de fractions sous la forme  $a/b$  ne sont pas faciles à maîtriser, et s'il faut limiter aux fractions simples l'utilisation de l'algorithme d'addition de fractions sous forme de couples, on se rend vite compte que c'est tout le contraire avec les nombres décimaux. La notation décimale d'une frac-

tion a de plus l'avantage d'utiliser le même langage que la plupart des calculatrices.

Le plus important, en résumé, c'est de développer chez l'enfant, d'abord l'habileté à estimer, et ensuite des habiletés à calculer. Pour cela, on profitera de situations variées et stimulantes pour lui faire effectuer de façon régulière un bon éventail d'opérations, en les intégrant, dans la mesure du possible, aux exercices de calcul sur les nombres naturels.

### 6.3 Multiplication

On doit distinguer ici deux niveaux de difficulté selon qu'un nombre décimal est multiplié par un nombre entier ou par un autre nombre décimal. Le premier cas peut être considéré comme une addition répétée et ne pose guère plus de difficultés que la multiplication de deux nombres naturels. Une attention particulière doit être accordée à la multiplication d'un nombre décimal par 10, par 100 ou par 1000; le développement de cette habileté facilitera l'acquisition de l'algorithme de la division de nombres décimaux en permettant d'éliminer la partie fractionnaire d'un nombre décimal.

$$2 \times 3,75 \$ = 3,75 \$ + 3,75 \$ = 7,50 \$$$

$$10 \times 2,24 \text{ m} = 22,4 \text{ m}$$

$$100 \times 2,24 \text{ m} = 224 \text{ m}$$

Notons que ces exemples font un usage abusif du symbolisme puisqu'on ne devrait pas retrouver, dans une même proposition, des unités de mesure et une opération quelconque; on devrait dire: pour trouver la longueur totale de 10 segments de 2,24 m chacun, j'effectue l'opération  $10 \times 2,24 = 22,4$ . Une telle utilisation est toutefois acceptable lorsque, de façon occasionnelle, elle enlève de la confusion et permet à l'élève de mieux comprendre.

Pour bien comprendre la multiplication de deux nombres décimaux, l'enfant pourrait revoir la multiplication de fractions sous la forme  $a/b$  et plus particulièrement la multiplication de fractions décimales. L'enfant a déjà appris à passer de la forme  $a/10$  à la notation décimale d'une fraction; en observant cette démarche, il pourra découvrir, vérifier, généraliser puis appliquer une règle lui permettant de multiplier directement deux nombres décimaux.

$$\frac{2}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{6}{100}$$

$$0,2 \times 0,3 = 0,06$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$0,5 \times 0,25 = 0,125$$

FIGURE 33

Dans l'ensemble des cas, et plus particulièrement dans ceux où la partie entière des facteurs est différente de zéro, il faut amener l'enfant à estimer l'ordre de grandeur de son produit.

On peut également l'amener à transformer les nombres décimaux en nombres rationnels en utilisant une règle déjà apprise.

$$\begin{aligned} 2,5 \times 3,2 &= \frac{25}{10} \times \frac{32}{10} \\ &= \frac{800}{100} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Finalement, voici succinctement quelque cas particuliers de multiplication de nombres déci-

maux qui permettent de vérifier ou d'appliquer certaines acquisitions ou même de choisir la notation d'une fraction qui rend le calcul plus aisé:

- multiplier un nombre par 0,9
- multiplier un nombre par 11; 1,1; 2,1 ...
- multiplier un nombre par 0,5
- multiplier un nombre par 0,25 ou 0,75
- multiplier un nombre par 0,125

### 6.4 Division

L'apprentissage de la division de nombres décimaux paraît difficile quand on l'aborde par une démarche purement technique; cependant, il peut devenir plus facile si on amène l'enfant à

comprendre les mécanismes de calcul pour cette opération.

Il convient de revenir sur la division des nombres naturels et de faire prendre conscience à l'enfant de ce qui arrive au quotient quand on multiplie le dividende ou le diviseur par 10. Ainsi, je ne change pas la valeur d'une équation de division si je multiplie le dividende et le quotient par le même nombre. Par contre, si je multiplie par 10 le diviseur, je dois alors diviser par 10 le quotient pour conserver le même rapport. Quand l'enfant maîtrise ces transformations, c'est-à-dire, quand il est capable de trouver le bon résultat après avoir effectué une transformation qui rend le calcul plus aisé, on peut l'amener à résoudre des opérations plus difficiles. Guidé par le maître, l'enfant pourra découvrir des algorithmes de calcul qu'il pourra vérifier en les appliquant aux cinq types de situations suivantes:

\*  $1 \div 5$

\*  $24,6 \div 6$

\*  $246 \div 4,1$

\*  $125,4 \div 4,18$

\*  $12,54 \div 41,8$

Finalement, l'habileté à estimer l'ordre de grandeur de la partie entière du quotient permet, dans la plupart des cas, de replacer la virgule au bon endroit du quotient après avoir effectué la division sans tenir compte des virgules; d'une manière plus générale, l'estimation est une habileté à développer, quelle que soit l'opération, puisqu'elle permet de dépister les erreurs de calcul.

- dans  $16,72 \div 4$ , la partie entière du quotient sera comprise entre 1 et 9 (0 et 10, bornes exclues) car  $1 < 1\frac{1}{4} < 10$
- dans  $167,2 \div 4,18$ , le quotient sera 40 car  $10 < 16\frac{1}{4} < 100$
- dans  $17,25 \div 2,3$ , la partie entière du quotient n'aura qu'un chiffre car  $1\frac{1}{2} \approx 8$
- dans  $225,804 \div 19,1$ , la partie entière du quotient aura 2 chiffres car  $225\frac{1}{9} \approx 220\frac{1}{20} = 11$ .

---

## Conclusion

L'objectif de ce fascicule était de présenter une vue globale de l'enseignement des fractions à l'école primaire; nous espérons que le lecteur y aura trouvé matière à réflexion et que chaque éducateur profitera de cette lecture pour resituer son enseignement à l'intérieur de l'ensemble des connaissances et des habiletés que doit acquérir l'enfant dans son apprentissage des fractions.

L'enseignement des fractions a évolué en même temps que tout l'enseignement primaire. Nous espérons que ce fascicule clarifie suffisamment cette partie du programme pour que, dans la planification des démarches pédagogiques, on respecte les grandes orientations que nous avons élaborées tout en tenant compte des besoins spécifiques de chaque milieu.

Parmi ces options fondamentales, rappelons le souci de ne pas commencer trop tôt l'apprentissage des fractions afin d'assurer l'adéquation entre nos objectifs de contenu et le développement intellectuel de l'enfant, et d'établir un équilibre entre les activités d'assimilation de contenu et celles visant l'acquisition d'algorithmes ou ne constituant que des activités d'exploration.

Ensuite, nous ne saurions insister trop sur l'importance, voire la nécessité, de bien faire comprendre à l'enfant ce qu'est une fraction, de développer chez lui l'idée de fraction avant d'aborder des notions plus complexes; or, cette étape ne peut se réaliser sans la compréhension de la distinction fondamentale entre le sens premier de la fraction (un nombre) et toutes les applications qu'on en fait.

Mentionnons aussi la nécessité de développer chez les enfants les habiletés de calcul dans les opérations où interviennent des fractions; ces automatismes sont indissociables de la compréhension, de l'acquisition et de la mémorisation des algorithmes fondamentaux de calcul.

Finalement, nous désirons réaffirmer la place grandissante que doivent occuper les nombres décimaux dans l'enseignement mathématique sans oublier, toutefois, que leur apprentissage doit s'appuyer sur une bonne connaissance des fractions simples.







