GOUVERNEMENT DU QUÉBEC

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION

DIRECTION GÉNÉRALE DE L'ENSEIGNEMENT
ÉLÉMENTAIRE ET SECONDAIRE

Ancien programme

LA MATHÉMATIQUE AU SECONDAIRE 5

GUIDE PÉDAGOGIQUE DES COURS MATH. 522 ET MATH. 532

Remarque: à compter de septembre 1972, les désignations MATH. 522 et MATH. 532 remplacent respectivement les désignations MATH. 511 et MATH. 521

DÉPÔT

QUÉBEC

octobre 1971

Document no. 307

221-Ma-3307

SECONDAIRE V

TABLE DES MATIERES

Introduction..... 1

Contenu des cours, indication des voies, commentaires et objectifs:

Logique et ensembles..... 2

Champ ordonné des nombres réels.....

Relations..... 11

Fonctions..... 15

Fonctions exponentielles et logarithmiques..... 18

Fonctions trigonométriques..... 21

Annexe I: Opérations vs Relations, en Logique..... 25

Annexe II: Complétude de $\mathbb{R}$

Annexe III: Etude des fonctions rationnelles..... 30

Annexe IV: Approche intuitive des exposants réels..... 33

Annexe V: Présentation des fonctions trigonométriques..... 35

Annexe VI: Répartition du contenu en 32 semaines.... 41

Annexe VII: Bibliographie.....

SECONDAIRE V

INTRODUCTION

1. Les cours "Fonctions (voie régulière)" et "Fonctions (voie enrichie)", connus également sous les appellations "Mathématique 521" et "Mathématique 531" ont été définis dans leurs grandes lignes par le Programme de 1969 (document 16-3103); quant au cours "Mathématique 511" (document 302), il a été approuvé en avril 1970, aussi dans ses grandes lignes. Le présent document vient en quelque sorte proposer une interprétation du contenu de ces cours en termes d'objectifs à atteindre dans chacune de leurs parties ou sections.

2. De nombreux commentaires viennent éclairer le contenu de chacun de ces cours ou en mettre en relief certains aspects. Dans quelques cas, la longueur du commentaire a même justifié son renvoi dans une annexe; la référence à cette annexe est alors indiquée dans le texte.

3. L'une des annexes propose, à titre d'exemple, un nombre approximatif de semaines à consacrer à chaque section des trois cours; ces suggestions tiennent compte de la préparation des élèves, c'est-à-dire des divers cours suivis en Secondaire IV.

4. A compter de septembre 1972, une nouvelle numérotation des cours de mathématique entre en application. Elle a pour but principalement de faire coïncider la désignation de chaque cours avec les numéros de code utilisés de plus en plus dans divers documents de la Direction générale de l'enseignement élémentaire et secondaire. Ce changement fournissait donc l'occasion de corriger l'anomalie que constituait la désignation MATH. 511 qui donnait à penser que ce cours est un cours de voie allégée, alors qu'il s'agit en fait d'un cours que l'on pourrait qualifier de "voie moyenne". Par ailleurs, l'expérience des deux dernières années a montré que le cours MATH. 521 est plutôt un cours de "voie forte" et que le cours MATH. 531 doit être à toute fin pratique supprimé en tant que tel (les quelques sujets qui lui étaient propres pourront être simplement considérés comme des suggestions d'enrichissement pour les classes où cela est justifiable).
   C'est pourquoi, le cours appelé MATH. 511 devient MATH. 522 à compter de septembre 1972,
   le cours appelé MATH. 521 devient MATH. 532 à compter de septembre 1972
   et le cours appelé MATH. 531 disparaît comme tel pour ne laisser que des suggestions d'enrichissement.

5. Nous attirons l'attention des divers responsables du classement des élèves sur les recommandations suivantes relatives aux normes de classement: sur 100 élèves ayant suivi avec succès un cours de mathématique de voie régulière ou enrichie de Secondaire 4 et optant pour un cours de mathématique de Secondaire 5, on devrait normalement en retrouver
   - au moins 40 en MATH. 522 (ex-MATH. 511)
   - au plus 60 en MATH. 532 (ex-MATH. 521)

   Ce classement pourrait par exemple être atteint en donnant l'accès au cours MATH. 532 à tout élève ayant réussi un cours de voie enrichie en Secondaire 4 et à tout élève ayant conservé en voie régulière (Secondaire 4) une moyenne non inférieure à une certaine note qu'on fixera localement en conséquence (par exemple, 65 ou 70).

6. La recommandation qui précède est faite dans l'esprit suivant: les sujets étudiés en MATH. 522 représentent environ 70% des sujets étudiés en MATH. 532; or il faut viser à donner à tous les élèves une égale efficacité dans ces sujets communs, car ils feront tout probablement face à une égale exigence sur ces sujets une fois arrivés au Collégial. C'est pourquoi, il est normal que 40% de ces élèves consacrent toute l'année à étudier les seuls sujets communs.

7. Dans ce guide pédagogique, à la colonne intitulée VOIE, on trouvera les indications 522 ou 532 ou ENR, selon que les sujets et les commentaires (que l'on trouve en regard de ces indications) se réfèrent au cours MATH. 522 ou au cours MATH. 532 ou à des suggestions d'enrichissement.

8. Au cours de la rédaction de ce guide, il est apparu que certains sujets non mentionnés explicitement au programme en 522 ou en 532 revêtaient tantôt un caractère de nécessité tantôt un caractère d'utilité et pouvaient donc être considérés comme faisant partie du programme.
   Ce sont:
   - des notions analytiques simples sur le cercle (en MATH. 522)
   - la notation des intervalles de nombres réels (en MATH. 522 et MATH. 532)
   - quelques tautologies, la densité et certains procédés graphiques (en MATH. 532)

   Par exemple, il va de soi qu'en MATH. 522 des notions simples sur le cercle sont inévitables pour la présentation des fonctions trigonométriques et très utiles en fournissant une interprétation concrète (graphique) à la résolution de certains systèmes de deux équations correspondant à un cercle et une droite.

CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
LOGIQUE ET ENSEMBLES		Remarque: On pourra traiter séparément LOGIQUE et ENSEMBLES, tout en faisant, dans le second cas, le rapprochement avec le premier. On pourra aussi fusionner ces deux chapîtres, par exemple en abordant la notion d'ensemble, la définition en extension, le diagramme de Venn, en voyant intuitivement les opérations sur les ensembles; la notion de proposition et de forme propositionnelle ainsi que la définition des opérations sur les propositions permettent ensuite un retour plus rigoureux aux opérations sur les ensembles; on poursuivra cette alternance avec les relations entre ensembles et entre propositions.
Notion d'ensemble et d'appartenance	522 - 532	Le terme "ensemble" est un terme primitif dont l'emploi est : - amené intuitivement par des exemples, - précisé par la règle (axiome) des ensembles "bien définis": Pour tout ensemble particulier A et tout objet particulier x, l'une des propositions suivantes est vraie et l'autre est fausse: $x \in A$, $x \notin A$. Remarque: le maître devra éviter d'ennuyer les élèves avec celles des notions ensemblistes déjà étudiées les années précédentes.
Ensemble universel	522 - 532	L'utilisation de variables nécessite la référence à un univers (un référentiel) qui devra être indiqué chaque fois. De même, l'utilisation de variables ensemblistes se fera dans un contexte donné et ne référera pas à un pseudo "ensemble de tous les ensembles".
Propositions et formes propositionnelles.	532	On partira des propositions en langue commune pour établir la notion de proposition en mathématique dont l'emploi est précisé par les lois du tiers exclu et de la non contradiction. Etant donné un référentiel (univers U), une forme propositionnelle P(x) à une variable sert à décrire un sous-ensemble de U qu'on appelle "l'ensemble-solution de P(x)" et que l'on note $\{x \in U \mid P(x)\}$. On considérera également des formes propositionnelles à deux variables.

CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
Quantificateurs	532	Les quantificateurs $\forall$ (pour tout) et $\exists$ (il existe au moins un) servent à transformer une forme propositionnelle P(x) en une proposition que, par abus de langage, nous appellerons "proposition quantifiée ": $\forall x \in U : P(x)$ ou encore $\exists x \in U :$ P(x) ; si la première (ou la seconde) est vraie, l'ensemble-solution de P(x) est U (ou un sous-ensemble non vide de U). Remarque: Il va de soi que l'obtention de propositions à partir de formes propositionnelles que l'on quantifie doit respecter certaines règles; le professeur fera bien quelques observations à ce sujet, mais il n'entre pas dans les objectifs de ce cours d'étudier des règles de quantification.
Description d'un ensemble	522 - 532	La notation en extension (par énumération) s'emploie avec des ensembles finis et certains ensembles infinis; l'usage des pointillés n'est pas sans inconvénients; de plus, on ne doit pas confondre ensemble et suite. La notation en compréhension (par description à l'aide d'une forme propositionnelle), soit $\{x \in U \mid P(x)\}$, doit devenir un mode d'expression familier à l'élève. Quant au diagramme de Venn, il sert normalement à indiquer l'appartenance ou la non-appartenance d'un objet à un ensemble. Pour qu'il serve à décrire ou définir un ensemble, il faut prendre certaines précautions.
Nombre d'éléments dans un ensemble	522 - 532	Approche intuitive des notions d'ensemble fini et d'ensemble infini (nous mettons ici les maîtres en garde contre les pseudo-définitions). L'ensemble vide sera considéré comme donné et comme étant sous-ensemble de tout ensemble; les objectifs du cours ne demandent donc pas de le définir (existence) ni d'en démontrer l'unicité. Il sera utile d'avoir une notation pour le cardinal (nombre d'éléments) d'un ensemble fini A ; il en existe plus d'une. Au besoin (dans un examen provincial par exemple), l'élève devra employer la notation Card(A) : cette notation ne prête pas à confusion et n'exige aucun effort de mémoire.

CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
Opérations sur les propositions	532	**L'observation de certaines propositions composées tirées de la langue commune amène la conjonction, la disjonction (inclusive), la négation, la conditionnelle et la biconditionnelle et les règles de leur emploi que l'on schématise en des tables présentées comme des axiomes. Les symboles $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ et $\leftrightarrow$ doivent être connus. On doit distinguer entre proposition composée et connecteur logique: par exemple, la proposition conjonction et l'opération conjonction (connecteur conjonctif).** **La négation des propositions composées, en particulier de la conjonction , de la disjonction (lois de De Morgan)** et de la conditionnelle, doit retenir l'attention des élèves. **L'examen de divers exemples de négation de propositions quantifiées permettra de clarifier le sens de certaines tournures du langage ordinaire:** "Aucun homme n'est...", "tous les hommes sont non...", "les hommes ne sont pas tous...", "certains hommes sont...", ...
	ENR	**Les connecteurs logiques seront considérés également au niveau des propositions quantifiées où les élèves ont souvent tendance à "distribuer" inconsidérément les quantificateurs. Il ne s'agit pas de faire quelque théorie que ce soit. Il s'agit tout au plus de donner à l'élève l'occasion de réfléchir à partir de certains cas précis. Par exemple, à l'aide de deux formes propositionnelles particulières P(x) et Q(x) sur un référentiel U comprenant seulement quelques éléments, on peut se demander si** $[\forall x \in U : P(x) \vee Q(x)]$ exprime bien les mêmes nuances que $[(\forall x \in U : P(x)) \vee (\forall x \in U : Q(x))]$; de même pour la permutabilité (ou non) de deux quantificateurs.
Propriétés des opérations logiques	532	**Dans un cours où la logique a pour but principal de donner à l'élève un langage mathématique nécessaire par la suite, il n'y a certes pas lieu d'envisager une Algèbre des propositions; pour ce que l'élève peut d'ailleurs trouver d'original ou d'enthousiasmant dans la commutativité et l'associativité de la conjonction et de la disjonction !!! Il ne faut donc pas insister sur ces propriétés. Cependant quelques cas peuvent retenir un peu plus l'attention: non commutativité (conditionnelle), distributivité ($\vee$ sur $\wedge$ et réciproquement), lois de De Morgan. Dans chaque cas, on s'efforcera d'en trouver des exemples dans le langage ordinaire et on pourra vérifier les conclusions sur** des diagrammes de Venn et des tables de vérité.

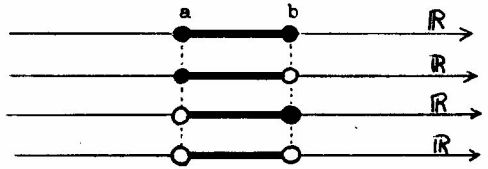
CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
Tables de vérité	532	**Les tables de vérité et leur utilité pour juger de certaines équivalences logiques doivent être connues des élèves, mais on ne devra pas s'y attarder.**
Tautologies	532	**Il est inévitable que l'on rencontre alors des formules logiques qui sont vraies pour toutes les valeurs de vérité des variables propositionnelles qu'elles contiennent, et d'autres qui sont fausses pour toutes ces valeurs; les premières sont des tautologies et les secondes des contradictions. On pourra l'indiquer chaque fois que l'on en rencontrera, mais on ne fera pas la "chasse" aux tautologies ou aux contradictions. Quelques tautologies qui sont utilisées dans certaines règles d'inférence mériteront cependant un intérêt particulier.**
Opérations sur les ensembles	522 - 532	**Dans chaque cas on distinguera entre l'opération et l'ensemble résultat.** **Dans un référentiel U, on définit $A \cap B$, $A \cup B$ et A'_U par des ensembles-solutions de formes propositionnelles appropriées. Dans un contexte où aucune confusion n'est possible quant au référentiel, on utilisera simplement la notation A' au lieu de A'_U. Sans étudier la différence (\) comme telle, on en utilisera cependant la notation dans certains cas (tels que: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $[0,\pi]\setminus\{\frac{\pi}{2}\},\ldots$).**
	ENR	Différence (\ ) et différence symétrique (Δ) d'ensembles; liens avec la logique.
Propriétés des opérations ensemblistes	522 - 532	**Les divers cas de commutativité, d'associativité, de distributivité seront vérifiés sur diagrammes de Venn de même que les propriétés de la complémentation relative à $(A')'$, $(A \cap B)'$ et $(A \cup B)'$; on vérifiera également sur des cas particuliers. On soulignera les rôles de $\emptyset$ et de U en regard de l'intersection, de la réunion et de la complémentation.**
	ENR	On pourra "démontrer" quelques-unes des propriétés des opérations ensemblistes en faisant la traduction en logique selon les définitions puis en utilisant une table de vérité ou en passant par une suite d'équivalences logiques.
	522 - 532	On donnera à l'élève l'occasion, sur quelques problèmes relatifs à des ensembles finis A,B et C, de constater les relations numériques entre $Card(A \cup B \cup C)$ et les cardinaux de A,B,C, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ et $A \cap B \cap C$.

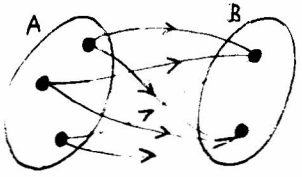
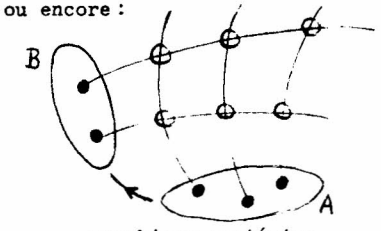
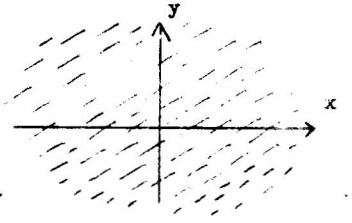
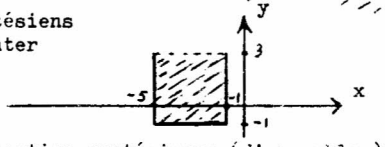
CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
Relations entre propositions	532	L'implication ($\Rightarrow$) et l'équivalence logique ($\Leftrightarrow$) sont des RELATIONS entre propositions. Elles surviennent à l'occasion de propositions conditionnelles ou biconditionnelles qui sont vraies tautologiquement (formules) ou pour tout le référentiel (formes propositionnelles) : par exemple, la formule conditionnelle "$p \rightarrow (p \vee q)$" est tautologiquement vraie, d'où on dit que p implique p ou q, et on écrit "$p \Rightarrow (p \vee q)$" De même pour une biconditionnelle tautologique où l'on peut remplacer "$\leftrightarrow$" par " $\Leftrightarrow$ ". (Voir à l'Annexe I un autre exemple de ces distinctions entre les relations et les opérati Cependant, dans la suite du cours, on confond pratiquement "si ...alors..." et "implique", ou "$\rightarrow$" et "$\Rightarrow$"; de même pour "si...et seulement si..." et "est logiquement équivalent à", ou "$\leftrightarrow$" et "$\Leftrightarrow$".
Relations entre ensembles	522 - 532	Inclusion stricte ($\subset$) et large ($\subseteq$). Egalité d'ensembles.
	ENR	On examinera les relations d'inclusion existant entre les divers sous-ensembles d'un référentiel U définis à partir de deux sous-ensembles A et B et des opérations d'intersection, de réunion et de complémentation.
	ENR	Pour un ensemble fini A, on notera $\mathcal{P}(A)$ la famille des sous-ensembles de A et, par une approche intuitive, on établira le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(A)$ en fonction de Card(A) ; la relation numérique obtenue justifie pour $\mathcal{P}(A)$ l'appellation "ensemble-puissance". On ne s'étendra cependant pas d'avantage sur cette notion.
	522 - 532	La relation d'équipotence (ou équivalence du point de vue de la cardinalité) survient lorsqu'il existe une correspondance biunivoque entre deux ensembles. Dans le cas des ensembles finis, l'équipotence est simplement la relation " a le même nombre d'éléments que".

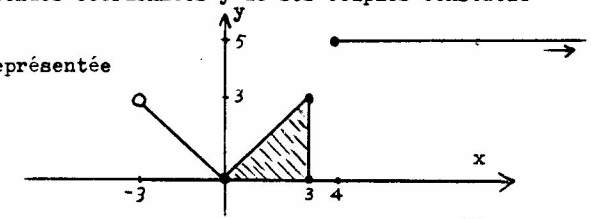
CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
Règles d'inférence	**ENR**	**Il s'agit ici d'illustrer, sur quelques exemples bien choisis, comment dans le raisonnement déductif on utilise en pratique des moyens qui évitent le recours pénible aux tables de vérité. Ces moyens sont les règles d'inférence; dans celles qui sont indiquées ci-après, on n'oubliera pas que ces règles elles-mêmes sont bien plus importantes que le nom qu'elles portent,** d'autant plus qu'il n'y a pas accord parfait sur ces noms chez les divers auteurs (telles les lois de disjonction et de détachement): - loi de détachement: $(p \wedge (p \rightarrow q)) \Rightarrow q$ (Si p est vraie et $p \rightarrow q$ est vraie, on peut alors en déduire que q est vraie). - loi du syllogisme: $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \Rightarrow (p \rightarrow r)$ (Si $p \rightarrow q$ est vraie et $q \rightarrow r$ est vraie, on peut alors en déduire que $p \rightarrow r$ est vraie). (On rencontre parfois sous ce nom une autre règle d'inférence d'usage: si a est un objet appartenant au référentiel U et si la proposition $\forall x \in U : P(x)$ est vraie, alors la proposition P(a) est vraie.) - **loi de contraposition:** $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ - **loi de disjonction:** $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ - **loi de substitution** (par laquelle d'une façon générale on peut remplacer dans un raisonnement une proposition par une autre qui lui est logiquement équivalente). **Remarque:** A côté des preuves directes (par des chaînes d'implications), on illustrera quelques preuves indirectes (par disjonction des cas, par l'absurde, par contre-exemple).

CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
CHAMP ORDONNÉ DES NOMBRES RÉELS		
Sous-ensembles de $\mathbb{R}$	522 - 532	**Revue rapide de :** - $\mathbb{N}$ (et $\mathbb{N}^*$); propriétés de + et .; équations $a + x = b$ et $a \cdot x = b$ (ici, $0 \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$). - $\mathbb{Z}$; propriétés de + et de .; équations $a + x = b$ et $a \cdot x = b$ - $\mathbb{Q}$ (définition); propriétés de + et .; premier exemple de champ (corps commutatif); équations $a + x = b$ et $a \cdot x = b$; tout rationnel a/b ($a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$) est égal à un décimal illimité périodique et réciproquement; conversion d'une notation à l'autre. - Ir et $\mathbb{R}$: les rationnels ne "remplissent" pas toute la droite numérique; on appelle "irrationnel" tout décimal illimité non périodique; approche non rigoureuse de la complétude; nombres réels et points de la droite (axiome de Cantor).
	ENR	Selon l'approche choisie pour la complétude, la notion de "borne" pourra être présentée; une approche plus rigoureuse peut être tentée (on trouvera à ce sujet des suggestions à l'**Annexe II**)
Postulats du champ des réels	522 - 532	Il s'agit de dégager les propriétés (axiomes) qui font de $\mathbb{R}$ un champ relativement à + et • (On soulignera tout simplement qu'on a un champ, mais on ne tentera pas de généraliser la structure de champ). Pour illustrer le rôle de ces axiomes, on pourra faire quelques démonstrations de propriétés simples telles que : - les lois de **résolution d'équations relatives à + et à • :** $\left[\begin{array}{l} a + x = b \Rightarrow x = {}^{-}a + b \\ a \cdot x = b \Rightarrow x = a^{-1} \cdot b \quad (a \neq 0) \end{array} \right]$ - les lois de l'opposé et de l'inverse: ${}^{-}0 = 0$ et ${}^{-}({}^{-}x) = x$ $1^{-1} = 1$ et $(x^{-1})^{-1} = x$ (pour $x \neq 0$) - le rôle de 0 face à la multiplication: $a \cdot 0 = 0$ et $[a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0$ **ou** $b = 0)]$ - l'égalité de deux fractions à termes réels (à partir de la définition $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$): $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c \quad (b, d \neq 0)$ Remarque: le but visé ici étant l'illustration du rôle des axiomes, on n'exigera pas que l'élève soit capable de faire seul (ou de refaire) ces démonstrations; un tel objectif peut cependant être visé **à titre d'enrichissement dans une classe d'élèves motivés.**

CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
		Remarque: Il va de soi que les notations logiques utilisées ici (ou ailleurs) n'ont pas à être enseignées aux élèves du cours 522.
Equations	522 - 532	**Quelques exercices de résolution d'équations permettent de souligner l'usage des principales lois découlant de la structure du champ des réels** (ces équations pourront contenir des fractions rationnelles).
Postulats d'ordre dans $\mathbb{R}$	522 - 532	**On prend les termes "positif" et "négatif" comme des termes primitifs et on définit $<$ et $>$ en ces termes** **et on postule la trichotomie:** Quels que soient les réels a et b, ou bien $a < b$, ou bien $a = b$, ou bien $a > b$. **ainsi que la positivité de la somme et du produit de deux réels positifs:** $(a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a+b > 0)$; $(a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0)$. On peut s'y prendre autrement - **en faisant de $<$ un terme primitif** (d'où on définit $>$, positif , négatif) - **et en postulant la trichotomie ainsi que l'invariance** (la conservation) **de $<$** **sous l'addition :** $\forall a,b,c \in \mathbb{R} : a < b \longrightarrow a + c < b + c$ **sous la multiplication par un positif:** $\forall a,b,c \in \mathbb{R} : a < b \wedge c > 0 \longrightarrow a \cdot c < b \cdot c$ D'une façon ou de l'autre, les propriétés ci-haut qui ne sont pas prises comme axiomes pourront être démontrées pour illustrer l'usage des axiomes; on démontrera aussi quelques autres propriétés souvent utilisées, telles que $a<b \wedge b<c \Rightarrow a<c$; $0<a \Rightarrow -a<0$; $a<b \Rightarrow -b<-a$; $0<a \Rightarrow 0<a^{-1}$; $0<a \cdot b \Rightarrow (0<a \wedge 0<b)$ ou $(a<0 \wedge b<0)$ On n'exigera pas des élèves qu'ils sachent refaire les démonstrations.
	522 - 532	On distinguera entre ordre strict et ordre large: $<$ et $\leqslant$; $>$ et $\geqslant$.
Inéquations	522 - 532	On résoudra quelques inéquations qui mettront en évidence l'utilisation des propriétés de l'ordre: inéquations de la forme $ax < b$; $(ax \pm b)(cx \pm d) < 0$; $\frac{ax \pm b}{cx \pm d} < 0$; et des cas avec $>$, $\leqslant$, $\geqslant$, $\neq$.

CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
Densité	532	$\forall a,b \in \mathbb{R}\ [\ a<b \longrightarrow \exists c \in \mathbb{R}:\ a<c<b\ ]$ (Entre deux réels distincts, il en existe au moins un autre) On fera observer que dans $\mathbb{Q}$ cette propriété est également vérifiée. A l'aide de cas particuliers de deux réels exprimés en notation décimale, on peut placer entre eux au moins un rationnel et au moins un irrationnel. Remarque: la densité de la droite réelle, telle qu'entendue ici, ne doit pas être confondue avec la continuité, en dépit de l'intuition.
Intervalles	522 - 532	La notation des intervalles (fermés, ouverts, semi-...) associés à deux réels a et b tels que $a<b$ s'avérera utile dans le cours: $[a\ ,\ b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b \}$ $[a\ ,\ b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b \}$ $]a\ ,\ b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b \}$ $]a\ ,\ b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$  Des notations pour les demi-droites numériques (fermées ou ouvertes) sont également utiles: $[a,+\infty$; $-\infty,a]$; $]a,+\infty$; $-\infty,a[$; par exemple, $]a,+\infty = \{ x \in \mathbb{R} \mid a<x \}$
Valeur absolue	522 - 532	Pour tout réel a : $\lvert a \rvert = a$ pour $a > 0$ $\lvert a \rvert = 0$ pour $a = 0$ $\lvert a \rvert = -a$ pour $a < 0$
	532	L'examen de cas particuliers amènera l'élève à pressentir la relation existant entre $\lvert a + b \rvert$, $\lvert a \rvert$ et $\lvert b \rvert$; de même pour $\lvert a \cdot b \rvert$. Cependant on n'exigera pas de preuves.
	522 - 532	Résolution d'équations et d'inéquations de la forme $\lvert ax - b \rvert \begin{matrix} < \\ \leqslant \\ > \end{matrix} \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$

CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
RELATIONS		**Remarque:** Les notions de base sur les relations binaires doivent être étudiées en général ainsi que dans le contexte particulier des nombres réels. Mais comme les "généralités" n'ont pour but essentiel qu'une meilleure compréhension des diverses relations dans $\mathbb{R}$ qui constituent l'objectif principal de ce cours, on devra donc se contenter de traiter les premières comme amorce des secondes auxquelles on accordera la priorité.
Produit cartésien; couples	532	Diverses situations concrètes peuvent donner lieu à une représentation telle que : ou encore :  graphique sagittal  graphique cartésien De telles situations concrètes et leurs représentations fournissent le contenu intuitif associé au terme primitif "couple" et permettent de formuler un axiome régissant l'emploi des couples: $(x,y) = (z,t) \iff x = z \wedge y = t$  Pour deux ensembles quelconques A et B, on définit: $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$ Le plan cartésien est alors $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$ On peut considérer certains produits cartésiens sous-ensembles de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et les représenter graphiquement $[-5, -1] \times [-1, 3[$ 
	ENR	On pourra faire remarquer que la multiplication cartésienne (d'ensembles) n'est ni commutative, ni associative; elle est cependant distributive sur l'intersection et sur la réunion, ce qui se vérifie aisément par un graphique sagittal et par un graphique cartésien.

CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
Relation	532	Remarque: Dans tout ce qui suit, il s'agit de relations binaires qu'on appellera tout simplement "relations".
		Diverses situations concrètes (relations telles que "est plus grand que", "n'est pas plus vieux que", "est inférieur ou égal à ", "est un diviseur de", "est un sous-ensemble de", etc...) permettront d'introduire la notion d'une relation d'un ensemble A vers un ensemble B comme un sous-ensemble du produit cartésien A x B; A et B sont respectivement l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de la relation.
		Remarque: Bien que plusieurs auteurs appellent "relation de A vers B" un triplet (A,B,R) d'ensembles tels que $R \subseteq A \times B$ et appellent R le graphe (ensemble des couples) de cette relation, on identifiera la relation avec son graphe. Soit dit en passant, il ne faut pas confondre graphe et graphique: ce dernier n'est qu'un dessin représentant le graphe.
	532	L'ensemble des premières coordonnées x des couples (x,y) d'une relation constitue son domaine et l'ensemble des secondes coordonnées y de ses couples constitue son image (ensemble-image).
		Par exemple, pour la relation R représentée ci-contre ($R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$): Dom(R) = $]-3, 3] \cup [4, +\infty[$ et Ima(R) = $[0, 3] \cup \{5\}$. 
	532	On exercera l'élève à représenter graphiquement diverses relations dans $\mathbb{R}$ et inversement, à décrire sous la forme $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \ldots\}$ des relations représentées graphiquement.
Réciproque d'une relation	532	A toute relation R de A vers B est associée la relation R^{-1} de B vers A telle que $R^{-1} = \{(x,y) \in B \times A \mid (y,x) \in R\}$; la relation géométrique existant dans le plan cartésien entre un point (x,y) et le point (y,x) permet d'obtenir facilement le graphique de R^{-1} à partir du graphique de R.
	ENR	Composition des relations; illustration sur diagrammes sagittaux et sur des relations réelles (à intégrer au reste du cours); associativité, élément neutre et symétrique (inverse). Notation f(g(x)) pour les cas où f et g sont des fonctions.

CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
Géométrie analytique de la droite		Remarque: L'utilisation des notions de "vecteur" et "valeur algébrique d'un vecteur" pour l'introduction de la géométrie analytique de la droite demeure un moyen pédagogique à la disposition du maître qui voudra y avoir recours; ce n'est cependant pas un objectif du cours.
	522 - 532	Distance de deux points; point milieu et point de partage (intérieur ou extérieur d'un segment [AB] selon un rapport $r > 0$ à partir de A.
	522 - 532	Equations des droites parallèles aux axes.
	522 - 532	Pente d'une droite; relation entre les pentes de deux droites parallèles ou perpendiculaires (un traitement plus rigoureux est possible après l'étude de la fonction tangente).
	522 - 532	Equation d'une droite à partir: - de la pente et de l'ordonnée à l'origine, - de la pente et d'un point quelconque, - de deux points quelconques, - des coordonnées à l'origine.
	522 - 532	Equation générale de la droite ($ax + by = c$)
	ENR	Equation normale de la droite (à voir après l'étude des fonctions sin et cos)
	522 - 532	Intersection de deux droites
	522 - 532	Distance d'un point à une droite.
Relations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$		Remarque: Pour chacune des relations réelles ci-après, on dégagera le <u>domaine</u> et <u>l'image</u> et on développera l'habileté à <u>représenter</u> graphiquement ainsi qu'à <u>décrire</u> (définir en compréhension) une relation représentée graphiquement.
	532	1) Relations linéaires de la forme $ax + by \lessgtr c$: droites et demi-plans associés (fermés ou ouverts) ;

CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
	532	2) **Relations du second degré** (voir la REMARQUE plus bas):
		- de la forme $y \lessgtr ax^2 + bx + c$ **: paraboles et régions associées (intérieures ou extérieures, ouvertes ou fermées) ; symétrie;**
		- de la forme $x^2 + y^2 \lessgtr r^2$ **: cercles et régions associées (intérieures ou extérieures, ouvertes ou fermées) ; on verra également l'équation canonique** $(x-k)^2 + (y-h)^2 = r^2$ **d'un cercle de centre (k,h) et de rayon r ; l'élève devrait aussi pouvoir établir l'équation de la tangente à un cercle en un point donné et trouver l'intersection d'une droite et d'un cercle ;**
		- de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \lessgtr 1$ **: ellipses et régions associées (intérieures ou extérieures, ouvertes ou fermées); points d'intersection avec les axes; centre et axes de symétrie;**
		- de la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \lessgtr 1$ **: hyperboles et régions associées; points d'intersection avec les axes; centre et axes de symétrie; on soulignera la présence des assymptotes.**
		REMARQUE: ce qui importe ici c'est que l'élève soit surtout capable de passer de la description algébrique à la représentation graphique et inversement; il n'entre pas dans les objectifs de ce cours de faire une présentation rigoureuse qui inclurait des démonstrations. **On résoudra cependant des problèmes d'intersection droite-cercle, droite-parabole.**
	- 522	Parmi les relations du second degré décrites ci-haut, on conservera **en Math. 522 le cercle centré à l'origine** et la parabole, à l'exclusion des régions intérieures et extérieures.
Propriétés de certaines relations	ENR	**Exemples de relations R d'un ensemble A vers lui-même(** $R \subseteq A \times A$**): réflexivité, anti-réflexivité, symétrie, anti-symétrie, transitivité.**
	ENR	**Relation d'ordre strict dans un ensemble A (anti-réflexivité, anti-symétrie et transitivité); exemples d'ordres stricts:** $<$ **dans** $\mathbb{R}$ **, "est un diviseur propre de" dans** $\mathbb{N}$ **,** $\subset$ **dans une famille d'ensembles;** **ordre large :** $\leqslant$ **,** $\subseteq$ **, "est un diviseur".** **ordre strict total (par exemple** $<$ **, mais non l'inclusion stricte ni "est un diviseur propre de" sauf dans certains cas très particuliers.)**
	ENR	**Relation d'équivalence (réflexivité, symétrie et transitivité); exemples de relations d'équivalence: égalité, parallélisme, isométrie, similitude, congruence modulo n (la fonction d'enroulement des réels sur le cercle trigonométrique fournit une congruence modulo** 2π **).**
	ENR	Une relation d'équivalence R dans un ensemble A fournit une partition de A en classes; cette partition (ensemble des classes) est l'ensemble quotient de A par R, que l'on note A/R.

CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
FONCTIONS		Remarque: Pour éviter ici toute confusion chez ceux qui parfois distinguent les termes "fonction" et "application", nous n'emploierons que le terme "fonction" qui d'ailleurs, relativement au domaine, est synonyme de "application".
	522 - 532	Une fonction f est une relation dans laquelle, pour chaque élément x de son domaine, il existe un unique élément y de son image tel que $(x,y) \in f$; on note alors: $f(x)=y$. On distinguera entre f (la fonction) et $f(x) = y$ (sa règle ou équation). On reconnait une fonction sur graphique sagittal et sur graphique cartésien.
Etude de quelques fonctions réelles		Exemples de fonctions réelles (on insistera sur le domaine, l'image et le graphique):
	522 - 532	- fonctions constante, valeur absolue, "plus grand entier non supérieur à";
		- fonctions polynômiales (on recherchera les zéros et la symétrie)
	522 - 532	linéaire: $f(x) = mx + b$ (cas particulier de la fonction [illegible]: [illegible]
	522 - 532	quadratique: $f(x) = ax^2 + bx + c$
	532	troisième degré: $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ (pour des a, b, c et d particuliers et entiers; on se limitera aux cas où on peut facilement ramener à la forme $f(x)=(...)(...)(...)$ et on partira d'une construction point par point)
	532	- fonctions rationnelles du type $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$; on soulignera la présence d'assymptotes; le passage de la forme $\frac{ax+b}{cx+d}$ à la forme $A + \frac{B}{cx+d}$ permettra de percevoir l'assymptote horizontale ainsi que [illegible] (voir à ce sujet l'Annexe III). Quant à Math. 522, on se limitera à la fonction de variation inverse: $(a\neq 0$ et $d=0)$.
	522	
	532	- autres fonctions: demi-cercle et demi-ellipse.
	532	Fonctions réelles et ordre:
		- une fonction f est strictement croissante dans un intervalle $]a,b[$ si et seulement si $\forall x_1, x_2 \in]a,b[\quad : \quad x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$; (il n'importe pas ici que l'élève utilise cette formulation; il importe [illegible] en pratique que telle ou telle fonction [illegible] ou n'est [illegible] intervalle).

CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
		- fonction strictement décroissante dans un intervalle donné; - le maximum (ou minimum) d'une fonction réelle f est, s'il existe, le plus grand (ou le plus petit) nombre appartenant à Ima(f). Remarque: On examinera sous ces aspects quelques-unes des fonctions réelles vues jusqu'ici et on fera de même pour les autres fonctions à voir (exponentielles, logarithmiques et trigonométriques). On constatera, on vérifiera; c'est tout ce que l'on vise ici.)
	522 - 532	Fonctions réciproques: certaines des fonctions vues jusqu'à maintenant ont pour réciproque une relation qui est aussi une fonction (on les appellera "fonctions réciproques" des premières); on considérera quelques exercices où on trouvera $f^{-1}(x)$ à partir de f(x), aussi bien graphiquement qu'algébriquement. Ne pas confondre "réciproque d'une fonction" et "fonction réciproque" à moins qu'il ne s'agisse d'un cas où la réciproque est justement une fonction.
Types de fonctions	ENR	Etant donné une fonction f d'un ensemble de départ A vers un ensemble d'arrivée B, on a Dom(f) $\subseteq$ A et Ima(f) $\subseteq$ B; alors - f est une fonction surjective de A vers B si et seulement si Ima(f)=B, - f est une fonction injective de A vers B si et seulement si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ - f est une fonction bijective de A vers B si et seulement si f est à la fois injective et surjective Remarque: On s'efforcera de retrouver ces types de fonctions parmi celles qui ont été étudiées et on fera de même avec celles qui restent à étudier.
	522 - 532	Même sans voir les aspects "injection" et "surjection" d'une bijection, l'étude de cette dernière fournira un vocabulaire plus précis que celui de "correspondance biunivoque".
Procédés graphiques	532	Pour faciliter le tracé des graphiques de certaines fonctions, il est avantageux de décomposer ces fonctions en sommes ou produits de fonctions plus simples s'il y a lieu (ces procédés doivent être présentés au fur et à mesure que les occasions naturelles se présentent à propos des fonctions au programme): - pour g(x) = f(x)+a , on obtient le graphique de g en ajoutant a à l'ordonnée de chacun des points du graphique de f; par exemple si $g(x) = x^2 + 3$, on peut partir de $f(x)=x^2$;

CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
		- pour $g(x) = a \cdot f(x)$, on obtient le graphique de g en multipliant par a l'ordonnée de chacun des points de f; par exemple, si $g(x) = -\frac{1}{2}x$, on peut partir de $f(x)=x$;
		- pour $h(x) = g(x) + f(x)$, on obtient le graphique de h en additionnant en chaque abscisse l'ordonnée du point de f et l'ordonnée du point de g; par exemple, si $h(x)=\sin x + \cos x$, on part des graphiques des fonctions sin et cos (ce sera utile plus loin);
		- pour f^{-1}, (la relation réciproque de f) on obtient son graphique en partant de celui de f et en utilisant la symétrie par rapport à la droite bissectrice du premier quadrant;
		- à l'occasion, on attirera l'attention sur le fait que certaines fonctions vérifient la propriété $f(x+a)= f(x)+ f(a)$ ou encore $f(ax)= a \cdot f(x)$ alors que ce n'est pas le cas pour d'autres fonctions.
	522	Remarque: bien que ces procédés graphiques ne soient pas au programme en Math. 522 , il est évident qu'ils pourraient être très utiles.

CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES		
Puissances	522 - 532	Rappel de la définition de la puissance b^x (avec $b \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{Z}$) et des lois ordinaires des exposants.
	522 - 532	Domaine, image et graphique de la fonction "racine carrée". (on la présentera comme bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$; ainsi $\sqrt{16}=4$ et non pas $\sqrt{16}=\pm 4$ qui est un non sens).
	522 - 532	Définition de b^x avec $b \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{Q}$ (on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la racine n-ième d'un réel positif b existe et est unique); exercices utilisant les lois des exposants (on admettra ces propriétés comme valides dans le cas des exposants rationnels , puisque ce sera "couvert" par un axiome plus loin).
	522 - 532	Approche graphique et intuitive des puissances d'exposants réels: à partir de $\exp_2(x) = 2^x$ et des valeurs entières puis rationnelles de x, si on comble les "lacunes" pour $x \in \mathbb{R}$, alors $\exp_2$ est une fonction (bijective) de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$ et dont la réciproque est une fonction (bijective) de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$; on considérera le cas de $\exp_1(x) = 1^x$ ainsi que les inconvénients inhérents à $\exp_{-2}(x) = (-2)^x$. (Voir l'Annexe IV relative aux puissances d'exposants réels).
Fonctions exponentielles	522 - 532	Les considérations intuitives qui précèdent préparent l'axiome des fonctions exponentielles: Pour tout réel b strictement positif et différent de 1 (a) b^x est un réel strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$; (b) pour tout réel y positif il existe un et un seul réel x tel que $y = b^x$; (c) les exposants réels satisfont les lois ordinaires des exposants. Remarque: on peut résumer les parties (a) et (b) de cet axiome en disant que la fonction $\exp_b$ telle que $\exp_b(x) = b^x$ est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$.

CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
Propriétés des fonctions exponentielles	522 - 532	L'élève remarquera - que le domaine et l'image de exp_b sont respectivement $\mathbb{R}$ et $]0;+\infty[$; - que si $0<b<1$, alors exp_b est une fonction décroissante (comme d'ailleurs sa fonction réciproque exp_b^{-1}); - que si $1<b$, alors exp_b est une fonction croissante (comme sa réciproque); - que $exp_b(0) = 1$; - que $exp_b(x_1 + x_2) = exp_b(x_1) \cdot exp_b(x_2)$; - que $b^r = b^s \Rightarrow r=s$ (d'où possibilité de résoudre des équations exponentielles)
Fonctions logarithmiques	522 - 532	Par définition, $\log_b(x) = exp_b^{-1}(x)$, d'où $b>0$, $b\neq1$ et $x \in]0;+\infty[$; des exercices de calcul numérique (avec b=2, b=3 et b=10) ainsi que la représentation graphique, le domaine et l'image de $\log_b$ en regard de exp_b permettront à l'élève de se familiariser avec la notation $\log_b(x)$. Remarque: $\log_{10}$ se notera simplement log.
	ENR	Base naturelle des logarithmes: e.
Propriétés des fonctions logarithmiques	522 - 532	Propriétés des fonctions logarithmiques: $\log_b(1)=0$; $\log_b(b)=1$; $\log_b(b^p)=p$; $b^{\log_b(x)}=x$; $\log_b(xy)=\log_b(x) + \log_b(y)$; $\log_b(x/y)=\log_b(x) - \log_b(y)$; $\log_b(x^p) = p \cdot \log_b(x)$; et exercices permettant d'appliquer ces propriétés.
	ENR	Changement de la base d'un logarithme: $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ (Tous les élèves devront connaître au moins l'existence d'une telle formule)
Equations	522 - 532	Equations exponentielles et logarithmiques.
Applications	522 - 532	Application des propriétés des fonctions exponentielles et logarithmiques à des problèmes concrets tels que par exemple la désintégration d'une substance radioactive, les mouvements d'un pendule, l'évaluation d'une aire ou d'un volume, l'intérêt composé, la multiplication des bactéries.

CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
Usage des tables	522 - 532	**L'élève doit se familiariser avec l'utilisation d'une table de logarithmes pour effectuer des calculs divers (la distinction entre "mantisse" et "caractéristique" d'un logarithme sera exigée; il n'est cependant pas nécessaire de parler de "cologarithme" ni "d'antilogarithme").** L'élève devrait pouvoir se débrouiller avec une table des nombres de 1 à 10 (à 3 ou 4 décimales) en utilisant la notation scientifique; une telle table se trouve d'ailleurs sur la règle à calcul.
	ENR	Procédé de **l'interpolation** dans le calcul logarithmique.

CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES		Remarque: On trouvera à l'Annexe V des commentaires et des suggestions sur l'introduction des fonctions trigonométriques.
Définition des fonctions trigonométriques	522 - 532	A partir de la fonction d'enroulement de l'ensemble des nombres réels sur le cercle trigonométrique, on introduit les fonctions sinus, cosinus et tangente d'un nombre réel; l'élève doit pouvoir en particulier trouver les images des multiples de π, $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ et $\pi/6$ par chacune de ces fonctions, (sans tables évidemment).
	522 - 532	Recherche des intervalles où ces fonctions sont croissantes (décroissantes): maximum et minimum s'il y a lieu.
	522 - 532	Domaine, image et graphique de ces fonctions (de cos, [illegible] sec, cosec et cotg, bien qu'avec moins d'importance).
	ENR	Type de fonctions: le sinus par exemple est une fonction surjective de $\mathbb{R}$ sur $[-1,1]$.
Fonctions réciproques	532	La restriction des fonctions sin, cos et tg à une partie appropriée de leurs domaines respectifs permet d'obtenir des fonctions Sin, Cos et Tg admettant des fonctions réciproques Sin^{-1}, Cos^{-1}, et Tg^{-1} qui sont notées habituellement Arcsin, Arccos et Arctg; domaines, images et graphiques de ces fonctions
Equations trigonométriques	532	Equations se ramenant aux formes $a \cdot f(x) + b = 0$ et $(a \cdot f(x) + b)(c \cdot g(x) + d) = 0$ dans lesquelles f et g sont des fonctions trigonométriques (sin, cos, tg, ...) et a,b,c et d sont des nombres réels; on considérera les ensembles-solutions aussi bien avec restriction du domaine que sans restriction.

CONTENU	VOIE	OBJECTIFS ET COMMENTAIRES
Identités trigonométriques	522 - 532	On mettra bien en évidence les identités fondamentales; les identités définissant cotg, sec et cosec; les identités liant $\sin^2$ et $\cos^2$, tg^2 et $\sec^2$, $\cot g^2$ et cosec^2; les identités concernant cos (-x) et sin (-x). L'élève devra en plus s'exercer à utiliser ces identités de base : - à partir de l'image d'un nombre par l'une des six fonctions, trouver l'image de ce nombre par chacune des cinq autres fonctions, - pour justifier certaines autres identités découlant des premières.
Formules d'addition	522 - 532	sin, cos et tg d'une somme ou d'une différence de deux nombres ainsi que du double d'un nombre (on peut démontrer à partir du cercle la formule du cosinus d'une différence puis en faire dériver les autres); application de ces formules au calcul d'une fonction trigonométrique d'un nombre pouvant s'exprimer comme une somme ou une différence de multiples de π, $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/6$.
Fonction "sinusoïde"		Etude de la fonction f définie par $f(x) = k \sin (ax + b)$:
	522 - 532	- domaine, image et graphique;
	522 - 532	- période (c'est le plus petit réel positif p tel que $f(x + p) = f(x)$ pour tout x);
	532	- fréquence (c'est l'inverse de la période);
	522 - 532	- amplitude [c'est ½·(maximum de f - minimum de f)];
	532	- déphasage: étant donné f telle que $f(x) = k \sin (ax + b)$ et g telle que $g(x) = k \sin (ax)$ on définit le déphasage de f à partir de g comme étant le nombre -b/a; ce déphasage correspond alors au déplacement (translation) qui amène g en f . Exercices d'application.
Fonction des angles	522 - 532	sin, cos, tg,..,d'un angle aigu dans un triangle rectangle (en termes de rapports des côtés);
	522 - 532	Fonctions des angles exprimés en degrés et en radians; usage des tables.
	522 - 532	Résolution des triangles rectangles.
	522 - 532	Lois des sinus et des cosinus, résolution des triangles quelconques.
	522 - 532	Exercices et problèmes d'application.

OPERATIONS VS RELATIONS , EN LOGIQUE

Si x et y sont deux nombres réels, alors x + y est un troisième nombre réel défini avec l'opération + tandis que x < y énonce une relation entre les nombres x et y.

De la même façon, si p et q sont deux propositions

alors p ⟶ q est une troisième proposition définie avec l'opération ⟶

tandis que p ⇒ q énonce une relation entre les propositions p et q.

Toutefois, dans ce dernier cas, l'énoncé (p ⇒ q) d'une relation entre p et q peut aussi, bien que ce soit à un autre niveau de considération ou de discussion, être considéré comme une proposition.

Cette remarque au sujet de ⟶ et ⇒ vaut de la même façon pour ⟷ et ⟺.

Voici un exemple:

Soit $x \in \mathbb{N}$ et soient les formes propositionnelles "x est divisible par 4", "x est divisible par 2" et "x est pair" que nous noterons respectivement P(x), Q(x) et R(x).

a) l'expression "P(x) ⟶ Q(x)" qui se lit "si P(x), alors Q(x)" étant toujours vraie, on peut donc affirmer "P(x) ⇒ Q(x)" qui se lit "P(x) implique Q(x)". En d'autres mots, l'énoncé P(x) ⇒ Q(x) affirme comme vrai l'énoncé $\forall x \in \mathbb{N}\,[\, P(x) \longrightarrow Q(x)\,]$ **(Ici, l'expression "toujours vraie" signifie "vraie pour tout x du domaine").**

b) De même, l'expression" Q(x) ⟷ R(x)" qui se lit "Q(x) si et seulement si R(x)" étant toujours vraie, on peut donc affirmer "Q(x) ⟺ R(x)" qui se lit "Q(x) est logiquement équivalent à R(x)".

En d'autres mots, l'énoncé Q(x) ⟺ R(x) affirme comme vrai l'énoncé $\forall x \in \mathbb{N}\ [\ Q(x) \longleftrightarrow R(x)\ ]$.

Cependant, **dans la suite du cours,** on confondra ordinairement "si...alors..." et "implique", ou " ⟶ " et " ⇒ "; de même pour "si... et seulement si..." et "est logiquement équivalent à", ou " ⟷ " et " ⟺ ".

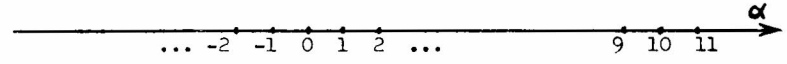
COMPLETUDE DE $\mathbb{R}$

Dans certains manuels de l'enseignement de la mathématique pour la fin du Secondaire, l'axiome de complétude du champ des nombres réels est présenté en termes de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui, s'ils sont bornés supérieurement, possèdent tous une plus petite borne supérieure. Les maîtres peuvent trouver divers exemples de cette approche.

Les lignes qui suivent ont pour seul but de constituer une alternative, permettant ainsi un choix au maître. Il s'agit ici d'une approche qui, bien que peu répandue dans les manuels du Secondaire, est peut-être plus éclairante en ce sens qu'elle permet de suivre une démarche à laquelle l'élève peut s'associer et au cours de laquelle il "voit" en grande partie. L'axiome de complétude de l'ensemble des nombres réels sera remplacé par l'axiome d'Archimède et l'axiome de continuité (ce qui est équivalent, puisque si un champ ordonné est complet, il est alors archimédien et continu, et réciproquement). Ces lignes s'inspirent de l'approche qu'on peut trouver dans "Papy, Mathématique Moderne 2", ch. 3, 4 et 5. On a cependant remplacé le contexte "binaire" par le "décimal".

I) Axiome d'Archimède

On considère d'abord une droite graduée α :



Soit G_o l'ensemble des points de cette graduation, c'est-à-dire le sous-ensemble de α comprenant les points associés aux entiers. Il y a bijection de G_o dans $\mathbb{Z}$. Nous qualifierons G_o de "graduation décimale" de la droite pour rappeler que les éléments de $\mathbb{Z}$ sont notés selon le système de numération décimale.

Considérons sur la droite α les intervalles fermés à gauche,

ouverts à droite et définis par chaque paire de points consécutifs de G_o. Si on désigne ces intervalles en se servant des abscisses (les entiers) de leurs extrémités, en notant $\dot{z}$ le point associé à un entier z, on peut alors dire que tous ces intervalles sont de la forme $[\dot{z} ; \dot{z+1}[$ où $z \in \mathbb{Z}$.

...

Axiome d'Archimède

Tout point P de la droite $\mathcal{A}$ appartient à un et à un seul des intervalles $[\dot{z} ; z\dot{+}1[$ associés aux points de la graduation.

II) Repérage d'un point $P \in \mathcal{A}$

1re étape: Soit P un point de $\mathcal{A}$.

Si $P \in G_o$, alors P est repéré par un décimal (entier).

Si $P \notin G_o$, alors P appartient à un des intervalles $[\dot{z}; z \dot{+} 1[$ (Archimède); passons donc à la 1re sous-graduation décimale G_1 de $\mathcal{A}$.

2e étape: Les points de G_o appartiennent aussi à G_1 et sont donc aussi repérés par des décimaux limités (à un chiffre après le point). Les autres points de G_1 sont repérés seulement par un décimal limité (à un chiffre après le point). Si $P \in$ ..., alors P est repéré par un décimal de la forme $z.a_1$.

Si $P \notin G_1$, alors (par l'axiome d'Archimède) P appartient à un seul des intervalles $[\dot{z}.a_1 ; \dot{z}.(a_1+1)[$ (En effet, on pourrait "re-désigner" les points de G_1 avec les éléments de $\mathbb{Z}$ seulement, d'où on peut de nouveau invoquer l'axiome d'Archimède). Passons alors à la 2e sous-graduation décimale G_2 de $\mathcal{A}$.

3e étape: Les points de G_o sont repérables par 3 décimaux chacun (de la forme z, z.o et z.oo),

les points de $G_1 \setminus G_o$ sont repérables par 2 décimaux chacun (de la forme $z.a_1$ et $z.a_1o$)

et les points de $G_2 \setminus G_1$ sont repérables par 1 décimal chacun (de la forme $z.a_1a_2$).

...

Si $P \in G_2$, alors P est repéré par un décimal de la forme $z.a_1a_2$

Si $P \notin G_2$, alors P est appartient à un seul des intervalles $[\dot{z}.a_1a_2 \ ; \ \dot{z}.a_1(a_2+1)[$

Passons donc à la 3^e sous-graduation décimale G_3 de α .

4^e étape: ...

Si $P \in G_3$, alors P est repéré par un décimal de la forme $z.a_1a_2a_3$

Si $P \notin G_3$, alors P est appartient à un seul des intervalles $[\dot{z}.a_1a_2a_3; \ \dot{z}.a_1a_2(a_3+1)[$

Passons à la 4^e sous-graduation décimale G_4 de α .

5^e étape: ...

.
.
.

et ainsi de suite ...

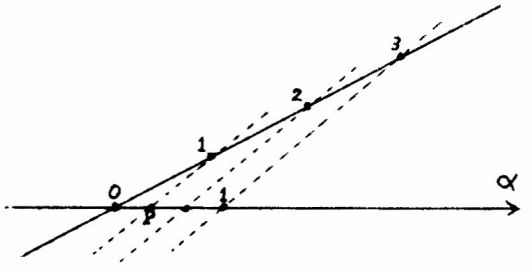
III) Points non repérables par des décimaux limités

Ce qui précède constitue un véritable programme de repérage qui permet d'associer à tout point P appartenant à l'une des sous-graduations décimales successives G_n de la droite α (pour tout $n \in \mathbb{N}$) un décimal limité (à n chiffres après le point).

Cependant il existe des points de α qui n'appartiennent à aucune des sous-graduations décimales successives de α, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N} \ [\ \alpha \setminus G_n \neq \emptyset \ ]$ ou encore, $\exists P \in \alpha \ [\ \forall n \in \mathbb{N} \ [\ P \notin G_n \ ] \ ]$

...

Considérer par exemple le point P défini par l'une des parallèles du diagramme ci-contre: tous les décimaux limités de la suite 0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, etc... l'approchent mais aucun d'eux ne le repère exactement, quelque soit le nombre de "3" après le point (remarquer qu'il s'agit ici d'une suite (illimitée) de décimaux limités).



On va donc chercher à repérer un tel point à l'aide d'un décimal illimité, pourvu qu'on puisse donner une signification aux décimaux illimités (ils ne correspondent plus à des sous-graduations de α): l'axiome de continuité nous permettra de faire cette extension.

IV Repérage de tout point $P \in \alpha$ (axiome de continuité)

Supposons que nous ayons affaire à un point non repérable par un décimal limité, tel le point P de l'exemple précédent. Nous allons lui associer une suite (donc illimitée) de segments (fermés).

On sait que $P \in [\dot{0}; \dot{1}]$, $P \in [\dot{0}.3; \dot{0}.4]$, $P \in [\dot{0}.33; \dot{0}.34]$, $P \in [\dot{0}.333; \dot{0}.334]$, etc... ; à P on trouve ainsi associée la suite décimale de segments (fermés) emboîtés

$$[\dot{0}; \dot{1}] , [\dot{0}.3; \dot{0}.4] , [\dot{0}.33; \dot{0}.34] , [\dot{0}.333; \dot{0}.334] , [\dot{0}.3333; \dot{0}.3334] , \text{etc...}$$

Avant de convenir que le décimal illimité $0.\overline{3} = 0.33333333$etc... suggéré par cette suite repère le point P, il faut s'assurer que;

...

(a) le point P soit le seul à appartenir à chacun des segments de cette suite

(b) inversement, si on part d'un décimal illimité, donc de la suite décimale de segments emboîtés qui lui est associée, il y ait au moins un point appartenant à tout segment de cette suite, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas de trous dans la droite, qu'elle soit continue. Ceci ne ferait pas de doute si la suite ne contenait qu'un nombre fini de segments; la densité suffirait à nous rassurer quant à l'existence d'au moins un point. Mais qu'en est-il lorsqu'il y a une infinité de segments ainsi emboités?

Axiome de continuité

> Etant donné une suite décimale de segments (fermés) emboîtés, il existe un et un seul point appartenant à tous les segments de cette suite.

Remarque: Une suite S_o, S_1, S_2, etc... de segments (fermés) est une suite décimale de segments emboîtés lorsque:

(a) le segment S_o est défini par deux entiers consécutifs, tel $[\overset{\bullet}{z}; z \overset{\bullet}{+} 1]$

(b) et chaque autre segment S_k est inclus dans le précédent S_{k-1} de telle manière que les extrémités de S_k soient deux points consécutifs de la k-ième sous-graduation décimale de la droite, c'est-à-dire deux points consécutifs de la subdivision décimale du segment S_{k-1} .

V Nombres réels

Par suite de cet axiome,

(1) tout décimal illimité repère un et un seul point de α ;

(2) tout point non repérable par un décimal limité est repérable par un et un seul décimal illimité;

...

(3) tout point repérable par un décimal limité (donc par une infinité) est aussi repérable par exactement deux décimaux illimités (en effet, dès qu'on a repéré un tel point dans l'une des sous-graduations de α, on a alors, à la sous-graduation suivante, le choix de le prendre comme extrémité gauche ou comme extrémité droite du segment (fermé) que l'on choisit pour continuer).

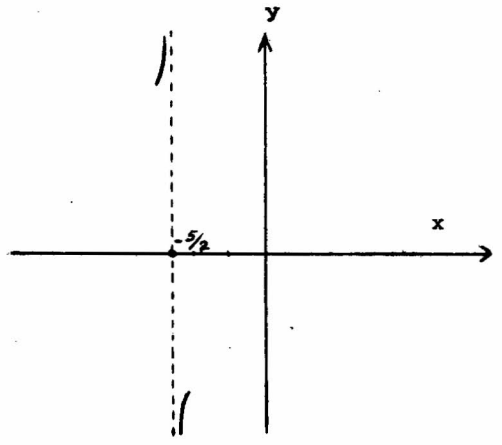
Si on définit "l'égalité" de deux décimaux (limités ou non) comme le fait qu'ils repèrent le même point de la droite on peut ensuite définir les "nombres réels" comme des décimaux à égalité près, c'est-à-dire que le nombre réel associé à un point sera la classe de tous les décimaux (limités ou illimité(s)) qui repèrent ce point.

On obtient ainsi automatiquement la bijection "abscisse" entre la droite et l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Ce n'est alors plus "l'axiome" mais bien le "théorème" de Cantor.

Remarque: Pour démontrer, par exemple, que $0.\overline{9} = 1.\overline{0}$, il suffit de montrer qu'ils repèrent le même point, c'est-à-dire que les points $\overset{\bullet}{0}.\overline{9}$ et $\overset{\bullet}{1}.\overline{0}$ appartiennent à une même suite décimale de segments emboîtés, et d'invoquer ensuite l'axiome de continuité pour affirmer que $\overset{\bullet}{0}.\overline{9}$ et $\overset{\bullet}{1}.\overline{0}$ sont un seul et même point, d'où $0.\overline{9}$ et $1.\overline{0}$ sont (ou désignent) un seul et même nombre réel.

ETUDE DES FONCTIONS RATIONNELLES

Voici un exemple: soit f la fonction dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{3x-1}{2x+5}$.



a) Domaine de f:

la fonction f étant définie pour tout $x \neq -5/2$, on a: $\mathbf{Dom}(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq -5/2 \}$

b) Assymptote verticale:

lorsque $x < -5/2$, on "constate" que si x tend vers $-5/2$, y tend vers $+\infty$;

lorsque $x > -5/2$, on "constate" que si x tend vers $-5/2$, y tend vers $-\infty$;

d'où la droite d'équation $x = -5/2$ est assymptote verticale.

c) Image de f:

Trouvons des nombres réels A et B tels que $f(x) = \frac{3x-1}{2x+5} = A + \frac{B}{2x+5}$;

i) une façon: si on effectue la division de 3x-1 par 2x + 5 on trouve 3/2 et le reste est - 17/2 d'où $\frac{3x-1}{2x+5} = \frac{3}{2} + \frac{-17/2}{2x+5}$;

admettant l'unicité de la division des polynômes, on a $A = 3/2$ et $B = -17/2$;

....

ii) une autre façon: de $\frac{3x-1}{2x+5} = A + \frac{B}{2x+5}$ on obtient $\frac{3x-1}{2x+5} = \frac{2Ax+5A+B}{2x+5}$ puis, pour $x \neq -5/2$, $3x - 1 = 2Ax + (5A+B)$

d'où $\begin{bmatrix} 3x = 2Ax \\ -1 = 5A+B \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A = 3/2 \\ \ldots\ldots \end{bmatrix}$ enfin $A = 3/2$ et $B = -17/2$ (on admet l'unicité de A et de B);

iii) Comme $\frac{3x-1}{2x+5} = \frac{3}{2} + \frac{-17/2}{2x+5}$ et que $\frac{-17/2}{2x+5}$ peut avoir toutes les valeurs réelles sauf 0, alors f(x) peut avoir toutes les valeurs réelles sauf 3/2. C'est pourquoi $\text{Ima}(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \neq 3/2 \}$.

iv) **On peut également trouver l'image de f en trouvant le domaine de f^{-1} :**
en effet $f(x) = \frac{3x-1}{2x+5}$; d'où $f^{-1}(x) = \frac{5x+1}{3-2x}$; ainsi $\text{Ima}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3/2\}$.

d) Assymptote horizontale:

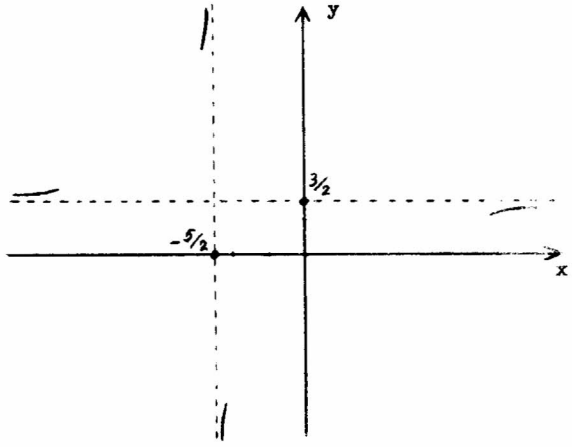
Lorsque x tend vers $+\infty$, on "constate" que $\frac{-17/2}{2x+5}$ est négatif et tend vers 0

de sorte que $f(x) < 3/2$ mais que f(x) ou y tend alors vers 3/2;

lorsque x tend vers $-\infty$, on "constate" que $\frac{-17/2}{2x+5}$ est positif et tend vers 0

de sorte que $f(x) > 3/2$ mais que f(x) ou y tend alors vers 3/2;

ainsi la droite d'équation $y = 3/2$ est assymptote horizontale.

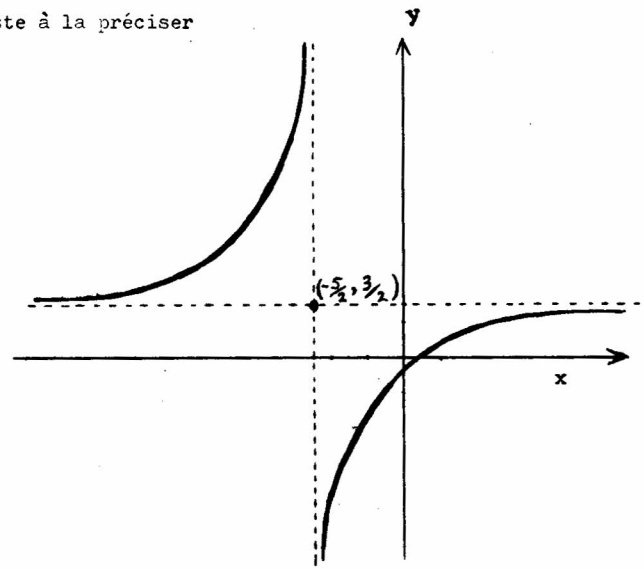


...

e) Graphique de f:

Connaissant maintenant l'allure générale du graphique de la fonction f, il reste à la préciser par le calcul de $y = f(x) = \frac{3}{2} + \frac{-17/2}{2x+5}$ pour quelques valeurs de x .

On remarquera la symétrie par rapport au point $\left(\frac{-5}{2}, \frac{3}{2}\right)$.



SECONDAIRE V — ANNEXE IV

APPROCHE INTUITIVE DE L'EXPOSANT RÉEL

Jusqu'à maintenant l'élève sait donner une signification aux puissances d'exposants entiers et aux puissances d'exposants rationnels: $2^3=(3)(3)(3)$ et $(2^{3/4})=\sqrt[4]{2^3}$.

Il faut donc faire en sorte qu'il donne une signification aux puissances d'exposants irrationnels, si on veut, pour la fonction exponentielle, lui parler d'un exposant réel quelconque.

A) Revenons alors un peu en arrière. Pour introduire les nombres irrationnels $\sqrt{2}$ et π il s'est avéré très significatif d'utiliser les suites d'intervalles fermés emboîtés, après avoir associé à ces "nombres" des points de la droite réelle, à l'aide du théorème de Pythagore pour $\sqrt{2}$ et du "déroulement" d'un cercle pour π :

$\sqrt{2}$ appartient à chacun des intervalles fermés emboîtés de la suite

$[1,2]$, $[1.4, 1.5]$, $[1.41, 1.42]$, $[1.414, 1.415]$, $[1.4142, 1.4143]$, ... etc... .

et π appartient à chacun des intervalles fermés de la suite

$[3,4]$, $[3.1, 3.2]$, $[3.14, 3.15]$, $[3.141, 3.142]$, $[3.1415, 3.1416]$, $[3.14159, 3.14160]$, ... etc...

cette approche a permis d'évaluer $\sqrt{2}$ par exemple à 1/10 près, à 1/100 près, à 1/1000 près, etc... à l'aide de nombres rationnels.

B) C'est la même approche qu'il faut adopter ici: $2^{\sqrt{2}}$ appartient à chacun des intervalles fermés emboîtés de la suite

$[2^1, 2^2]$, $[2^{1.4}, 2^{1.5}]$, $[2^{1.41}, 2^{1.42}]$, $[2^{1.414}, 2^{1.415}]$, $[2^{1.4142}, 2^{1.4143}]$, ... etc...

et 2^{π} appartient à chacun des intervalles fermés emboîtés de la suite

$[2^3, 2^4]$, $[2^{3.1}, 2^{3.2}]$, $[2^{3.14}, 2^{3.15}]$, $[2^{3.141}, 2^{3.142}]$, $[2^{3.1415}, 2^{3.1416}]$, ... etc...

Cela permet encore ici un calcul approché; on peut en principe évaluer $2^{\sqrt{2}}$ et 2^{π} avec autant de précision qu'on le désire, en se servant de puissances d'exposants rationnels qui approchent $2^{\sqrt{2}}$ ou 2^{π} selon le cas.

...

c) Des considérations de cet ordre, assorties de quelques exercices de calcul d'approximation, permettraient à l'élève de donner une signification à une affirmation comme " $2^{\sqrt{2}}$ existe, c'est un nombre réel" qui est loin d'être banale.

A ce moment là, il devient plus plausible, pédagogiquement, de considérer les nombres 2^x comme étant des nombres réels pour chaque x irrationnel et comme venant combler les lacunes pour que la fonction $exp_2(x)=2^x$ soit définie pour tout x réel.

VERS LES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Pour bien nous rendre compte des difficultés que l'élève rencontre lorsqu'on lui présente les fonctions trigonométriques, prenons par exemple la fonction cosinus et analysons brièvement les diverses étapes que la compréhension de cette fonction suppose.

1) L'élève doit d'abord saisir l'idée intuitive de "l'enroulement" de la droite réelle sur un cercle unitaire. Mais c'est très péniblement (et les maîtres le savent) que l'élève arrive à situer approximativement les points correspondant à quelques nombres réels donnés, à moins que ces derniers ne soient particulièrement "bien choisis". On exige déjà de cet élève qu'il passe à l'étape suivante alors qu'il se figure assez mal ou même pas du tout les effets particuliers de cette fonction d'enroulement, tout simplement parce que la mesure sur un cercle n'est pas une notion aussi simple qu'on ne le croit généralement.

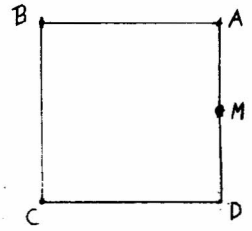
2) Il doit ensuite percevoir que cet enroulement crée les classes d'une partition de l'ensemble des réels. Avec ou sans le vocabulaire approprié, il en saisit bien l'idée générale mais parfois ne saisit aucune classe particulière parce que ce sont des classes d'équivalence suivant le module 2π et qu'un pareil module, déjà encombrant en soi parce qu'il est irrationnel, ne vient nullement éclairer celui qui dispose d'une notion de mesure d'arc qui est la plupart du temps assez vague, il faut bien le dire.

3) Sur une base aussi mal assurée, on ne peut pas espérer que se développe une idée précise des coordonnées du point obtenu (pour un nombre réel donné r) par la fonction d'enroulement, et donc de l'abscisse qu'on définit comme étant le cosinus du nombre r; encore ici, sauf pour les cas "bien choisis", l'élève n'attrape que des idées vagues, même s'il utilise immédiatement des tables dont la provenance et la justification lui apparaissent pour le moins mystérieuses. S'il perçoit facilement que le domaine de la fonction cosinus est $\mathbb{R}$, il a par contre souvent besoin qu'on lui dise explicitement que l'ensemble-image est l'intervalle fermé $[-1,1]$.

4) Vient alors l'étape suivante: la représentation graphique. A partir de la définition de la fonction cosinus, l'élève est très probablement incapable non seulement de découvrir seul l'allure générale de la courbe représentant graphiquement la fonction, mais même de la percevoir dans un petit intervalle, toujours parce qu'il faut "mesurer" des arcs. On admettra qu'une fonction de période 2π n'est peut-être pas, du point de vue pédagogique, le meilleur choix à faire comme exemple d'une fonction périodique. C'est d'ailleurs en bonne partie pour les mêmes raisons que l'élève trouvera encore des difficultés quand on voudra lui faire résoudre des équations trigonométriques.

...

Il est certain que la fonction cosinus (ou l'une des autres) est une notion complexe, dans la composition de laquelle entrent plusieurs "ingrédients" dont l'un mérite l'attention des maîtres parce qu'il constitue une difficulté dont on ne se rend pas toujours compte: c'est la mesure d'un arc de cercle. Cette difficulté ne saurait guère être évitée; on peut cependant la neutraliser temporairement en l'isolant et en mettant en place tous les autres concepts essentiels à l'étude des fonctions trigonométriques. "Diviser pour régner" est une tactique éprouvée et elle n'est pas sans valeur dans l'apprentissage des notions complexes; elle a inspiré l'approche suivante des fonctions trigonométriques, approche donnée ici à titre de suggestion seulement. Il va de soi qu'une bonne partie du vocabulaire et des symboles qui seront utilisés par souci de brièveté peut être évitée; mais ce qu'on ne peut pas éviter, ce sont les concepts que ce vocabulaire et ces symboles recouvrent.



I Une application de $\mathbb{R}$ sur un carré

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points d'un carré ABCD où M est le milieu de [AD].
Soit [AM] l'unité de mesure, c'est-à-dire que m [AM] = 1 .
Considérons alors l'application f de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{C}$ définie ainsi d'une manière intuitive:

(a) si $x \in \mathbb{R}^+$, alors f(x) est le point du carré $\mathcal{C}$ obtenu à x unités en "enroulant" $\mathbb{R}^+$ sur le carré, à partir de M et dans le sens de M vers A; en particulier, f(0) = M;

(b) si $x \in \mathbb{R}^-$, alors f(x) est le point de $\mathcal{C}$ obtenu à $|x|$ unités en "enroulant" $\mathbb{R}^-$ sur le carré, à partir de M et dans le sens de M vers D.

A) L'élève peut alors facilement trouver (ou construire) des points tels que f(1), f(-1), f(2), f(-2), ..., f(8), f(-8); de même pour des points tels que f(0.125), f(9/4), f(-6.25), ... (nul besoin de tables !!!).

B) La construction de points tels que f(3.5), f(11.5), f(19.5), f(-4,5), f(-12.5),... lui permet déjà de trouver toute une classe de nombres réels qui viennent "s'empiler" sur un même point de $\mathcal{C}$.

...

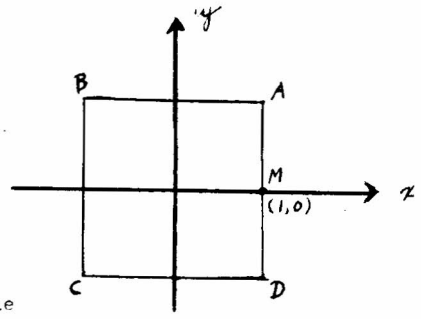
C) On choisit un point du carré, soit par exemple le milieu F de $[BC]$, et on fait trouver plusieurs éléments de $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x)=F\}$, puis tous les éléments (en essayant de décrire l'ensemble). De même, on fait résoudre une équation comme f(x)=f(2).

D) Voici des exercices plus généraux: démontrer que pour tout x et tout y appartenant à $\{8n+5 \mid n \in \mathbb{N}\}$, on a f(x)=f(y); en est-il de même pour les ensembles $\{8z+7 \mid z \in \mathbb{Z}\}$, $\{8z+0.5 \mid z \in \mathbb{Z}\}$? quel est le plus "grand" sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dont tous les éléments ont pour image par f le point T milieu de $[MD]$?

E) L'application f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ fournit un moyen d'associer inversement à chaque point P du carré un certain sous-ensemble de $\mathbb{R}$; si on note ce sous-ensemble g(P) et qu'on le définit par $g(P)=\{x \in \mathbb{R} \mid f(x)=P\}$, on peut alors trouver g(M), g(A), g(C),... et découvrir qu'à l'ensemble $\mathcal{C}$ des points P du carré se trouve associée la famille $\mathcal{G}$ des sous-ensembles g(P) de $\mathbb{R}$.
Il apparaît alors que $\mathcal{G}$ est une partition de $\mathbb{R}$ (dont les classes sont appelées "classes modulo 8") et que g est une bijection de $\mathcal{C}$ sur cette famille $\mathcal{G}$.

...

II Quelques fonctions associées à l'application f de $\mathbb{R}$ sur le carré



A) On considère de nouveau le carré ABCD qu'on a cette fois-ci placé en position "standard" dans un système de coordonnées rectangulaires: le point M a pour coordonnées le couple (1,0).

On modifie alors le jeu comme suit: puisque chaque point de $\mathcal{C}$ est exprimable comme un couple $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on convient maintenant que f applique $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{C}$ devenu sous-ensemble de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; par exemple, alors qu'en I on avait f(0)=M, on a maintenant f(0)=(1,0).

Pour donner à l'élève l'occasion de s'adapter à ce changement, on peut refaire quelques exercices du genre de ceux vus en I A), B), C) et D), mais dans ce nouveau contexte. On l'amène à vérifier que, quels que soient les réels r, x et y, si f(r)=(x,y), alors $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$; on a même $\{x,y\} \cap \{-1,1\} \neq \emptyset$!!!
Autre exercice: trouver $\{r\in\mathbb{R} \mid \forall x, y \in \mathbb{R} : f(r)=(x,y) \rightarrow x=y\}$.

B) Une ancêtre de la fonction cosinus.

Soit α la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie comme suit:
$\forall r,x,y\in\mathbb{R} \quad [\alpha(r)=x \leftrightarrow f(r)=(x,y)]$; c'est-à-dire que $\alpha(r)$ est l'abscisse du point (x,y) image de r par f ;

par exemple, $\alpha(3.4)=-1$ car $f(3.4)=(-1,0.6)$.

1) On trouve facilement (sans aucune table !!!): $\alpha(0)$, $\alpha(1)$, $\alpha(-1.3)$, $\alpha(-9.015)$, $\alpha(-624.01)$, etc.

2) On remarque l'ensemble-image de α (c'est surement déjà fait).

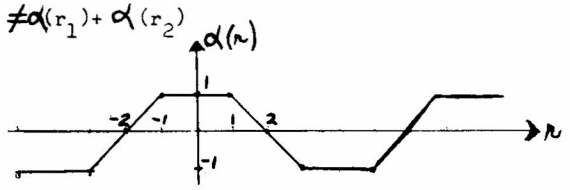
3) Quelques exercices du genre:
- trouver $\{r\in\mathbb{R} \mid \alpha(r)=0\}$, $\{r\in\mathbb{R} \mid \alpha(r)=-0.94\}$
- comparer les solutions de $\alpha(r)=0.94$ avec celles de $\alpha(r)=-0.94$
- montrer que $\forall r\in\mathbb{R} \quad [\alpha(r)=\alpha(-r)]$ (une première identité!!!)
- vrai ou faux: $\{r\in\mathbb{R} \mid \alpha(r)=1.25\} = \emptyset$?

...

- trouver deux réels r_1 et r_2 tels que $\alpha(r_1 + r_2) = \alpha(r_1) + \alpha(r_2)$

  et deux réels r_1 et r_2 tels que $\alpha(r_1 + r_2) \neq \alpha(r_1) + \alpha(r_2)$

4) Dans un système d'axes où l'on remplace l'habituel axe des x par l'axe des r, et l'axe des y par l'axe des $\alpha(r)$, on fait tracer le graphique de la fonction α :



5) Quel est le maximum de la fonction α , c'est-à-dire l'élément $\alpha(r_1)$ de l'ensemble-image de α tel que, pour tout r, $\alpha(r_1) \geq \alpha(r)$? quel est le minimum?

6) Trouver plusieurs valeurs possibles d'un réel p tel que $\alpha(r+p) = \alpha(r)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$; parmi les nombres possibles et positifs, en existe-t-il un plus petit? quel est-il? ce plus petit p positif tel que $\alpha(r+p) = \alpha(r)$ pour tout r appartenant au domaine de α est appelé "la période" de la fonction α ; on dit que celle-ci est une fonction périodique de période p (ici c'est 8).

7) Pour donner un avant-goût des tables trigonométriques et faire pressentir leur origine, on peut partager entre plusieurs élèves le soin de construire partiellement la table de la fonction α pour tous les nombres de 0 à 3 qui ont deux chiffres après le point.

C) On pourrait refaire la même démarche avec une fonction β (l'ancêtre du sinus), puis ensuite faire résoudre quelques équations du type $\alpha(r) = \beta(r)$, $\alpha(-r) = \beta(r)$, ..., soit en s'inspirant directement du carré, soit en traçant dans un même plan cartésien les graphiques de α et de β .

...

III Quelques commentaires

Il est évident qu'il serait amusant de poursuivre dans cette voie, en présentant par exemple une fonction γ (ancêtre de la tangente) définie à partir de α et β. De même, recommencer le tout sur un hexagone, un octogone, un dodécagone, permettrait de voir "s'adoucir" et "s'arrondir" les graphiques de ces fonctions. Cependant, l'objectif recherché, ne l'oublions pas, est la mise en place de tous les concepts essentiels à la compréhension des fonctions trigonométriques, tout en neutralisant le facteur "mesure d'un arc de cercle". L'approche suggérée ici, où l'on consacrerait une ou deux périodes à la partie I, trois ou quatre périodes à la partie II A et B, puis deux ou trois autres à la partie II C, loin d'être une perte de temps, permettrait au contraire de bien rattraper le temps par la suite tout en assurant une très bonne compréhension, surtout si le professeur aménageait cette présentation sous forme d'une fiche que l'élève parcourrait lui-même en un temps souvent étonnamment court.

Après avoir maîtrisé sans obstacle l'idée du point associé à un réel sur un carré unitaire, de ses coordonnées toujours faciles à évaluer, des fonctions associées à ces coordonnées et de leur représentation graphique (ainsi que leur maximum, minimum et périodicité), sans oublier les équations pré-trigonométriques, les élèves seraient alors prêts à refaire la même démarche sur le cercle unitaire avec, comme seule difficulté cette fois, le problème de la mesure d'arc.

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

REPARTITION DU CONTENU SUR 32 SEMAINES

Remarque:

Les indications qui suivent sont données à titre de suggestions seulement et ont pour but de préciser l'importance relative des diverses sections du cours. S'il y a lieu (en particulier lorsque le maître donnera ce cours pour la première fois), on préférera passer sous silence certaines notions d'une section plutôt que de consacrer à cette section plus de temps qu'il n'en est indiqué dans le tableau ci-après.

Les nombres apparaissant dans ce tableau sont basés sur la semaine comme unité. Il est tenu compte de la préparation des élèves.

	Math. 522		Math. 532		
	après Math. 43	après Math. 422	après Math. 43	après Math. 43 + 44	après Math. 422 ou 432
Logique			5	6*	4
Ensembles	3	2			
Nombres réels	6	5	3	5*	3
Relations			6	6*	5
Fonctions	6**	4**	3	4*	3
Fonct. exp. et log.	3	7	3	3*	5
Fonctions trig.	14	14	12	8*	12
TOTAL	32	32	32	32	32

* Il est évident que les les élèves ayant réussi Math.(43 et 44) en Secondaire IV et n'ayant pas été admis au CEGEP, pourront en Secondaire V suivre un Math. 532 enrichi.

** Cela inclut la géométrie analytique (droite, cercle et parabole) qui apparaît dans la section Relations et qui est indiquée comme concernant MATH. 522.

BIBLIOGRAPHIE

A) MANUELS DE REFERENCE POUR LA CLASSE

Remarque: **Quel que** soit le livre choisi comme manuel de classe, le professeur devra, sur une ou plusieurs sections du cours, ajouter certains compléments.

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE, par **Fisher** et Siebur, (Beauchemin);

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE, par Robison, (McGraw-Hill);

GÉOMÉTRIE, Tomes 3 et 4, par Hébert et Labourin, (Éditions Vaudreuil);

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUES MODERNES, SECONDAIRE DE CYCLE (en 3 **volumes**), par Jarry et... (Lidec);

ENSEMBLES, RELATIONS ET FONCTIONS, par Selby et Sweet, (McGraw-Hill);

MATHÉMATIQUE, OPTION 521-531, par Claudius et Ouellet, (F.I.C.);

MATHÉMATIQUES MODERNES 5, par Brouillard et Cloutier, (Holt, Rinehart et Winston);

MATHÉMATIQUES MODERNES, SECONDAIRE V, par Dolciani et Gravel, (C.E.C.P.);

MATHÉMATIQUES MODERNES, SECONDAIRE V, Johnson et Rousseau, (Éditions du Renouveau Pédagogique);

MATHÉMATIQUES NOUVELLES, Tome 5, par Hamel, Richard et ..., (F.I.C.);

RELATIONS, par Ling et Lafond, (Dunod-Québec).

INTRODUCTION A LA MATHEMATIQUE, par Collette et Laliberté, (Editions du Renouveau Pédagogique).

B) OUVRAGES DE CONSULTATION

Remarque: 1) La plupart de ces ouvrages devraient, en permanence, être à la disposition des professeurs; les meilleurs de ces ouvrages devraient même être faciles d'accès aux élèves particulièrement intéressés.

2) A la suite de chaque ouvrage mentionné, on indiquera entre crochets les sections du programme de Secondaire 5 qui sont touchées, en tout ou en partie, par l'ouvrage en question; ces sections seront indiquées comme suit:

S_1: LOGIQUE
S_2: ENSEMBLES
S_3: LE CHAMP ORDONNÉ DES NOMBRES REELS
S_4: RELATIONS (y inclus Géométrie analytique) & FONCTIONS
S_5: FONCTIONS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES
S_6: FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

A LA DECOUVERTE DE L'ALGEBRE, par Braun et Los, (Marabout Université); [S_3]

ALGEBRA AND TRIGONOMETRY, by Keedy, Griswold,..., (Holt, Rinehart & Winston); [S_3 S_4 S_5 S_6]

ALGEBRAIC AND CIRCULAR FUNCTIONS, by Paterson, George,..., (Holt, Rinehart & Winston); [S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6]

ALGEBRE ET ANALYSE, par Denis et Déri, (Holt, Rinehart et Winston) [S_3 S_4 S_5 S_6]

ALGEBRE MODERNE ET ACTIVITES HUMAINES, par Kemeny, Snell et Thompson, (Dunod); [S_1 S_2]

ANALYTIC GEOMETRY, by Steen and Ballou, (Ginn); [S_4]

AN INTRODUCTION TO LIE ALGEBRAS, by Bechenbach and Bellmann, (Ginger); [S_3 S_4]

COLLEGE MATHEMATICS WITH BUSINESS APPLICATIONS, by Freund, (Prentice-Hall); [S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6] **(nombreux problèmes d'application pour Math. 522-532)**

COMPRENDRE LA MATHEMATIQUE MODERNE, par Gennart, (Marabout Université); [S_2 S_3 S_4]

ELEMENTARY LOGIC FOR SECONDARY SCHOOLS, by Brant and Keedy, (Holt, Rinehart and Winston); [S_1]

ELEMENTS DE MATHEMATIQUE MODERNE I, Théorie, par De Celles, (Lidec); [S_2 S_4]

ELEMENTS DE MATHEMATIQUE MODERNE II, Tome 2, par **De Celles**, (Lidec); [S_3]

ELEMENTS DE MATHEMATIQUES MODERNES, par Richardson, (Dunod); [S_1 S_3 S_4 S_5 S_6]

FUNCTIONS, RELATIONS AND TRANSFORMATIONS, by Elliott, Fryer,... (Holt, Rinehart & Winston); [S_1 S_4 S_6]

FUNDAMENTALS OF MODERN MATHEMATICS, by Jackowski and Sbrera, (Prentice-Hall); [S_1 S_2 S_3 S_4]

INTRODUCTION A LA LOGIQUE, par Tarski, (Gauthier-Villars); [S_1]

INTRODUCTION A LA THEORIE DES ENSEMBLES, par Breuer, (Dunod); [S_2 S_3]

INTRODUCTION AUX MATHEMATIQUES MODERNES, par Lonjallon, (Vuibert); [S_1 S_2 S_4]

INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LOGIC, by Dinkines, (Appleton-Century); [S_1]

INTRODUCTION TO SETS, by MacLean, Mumford and Bates, (Copp Clark); [S_2]

LES BASES DE L'ANALYSE MATHEMATIQUE MODERNE, par Doneddu, (Dunod); [S_2 S_3 S_4 S_5]

LANGAGES, ENSEMBLES, THEORIES MATHEMATIQUES, par Hervieux et Paquette, (Holt, Rinehart et Winston); [S_1 S_2]

LES MATHEMATIQUES NOUVELLES (dans votre vie quotidienne), par Lorne et Robineau, (Casterman/Poche); [S_1 S_2 S_4]

MATHEMATIQUE, Classes de seconde, par Cluzel et Vissio, (Delagrave); [S_2 S_3 S_4]

MATHEMATIQUE MODERNE I, par Papy, (Didier); [S_2 S_4]

MATHEMATIQUE MODERNE 2, par Papy, (Didier); [S_3]

MATHEMATIQUES, 1^e A et B, par Maillard et Cahen, (Hachette); [S_4 S_6]

MATHEMATIQUES GENERALES, Tome I, par Larue et Gaulin, (Presses de l'Université Laval); [S_2 S_3 S_4]

MATHEMATIQUES MODERNES I, par Calame, (Editions du Griffon); [S_2 S_4]

MODERN INTERMEDIATE ALGEBRA, by Nichols, Heimer and Garland, (Holt, Rinehart & Winston); [S_1 S_3 S_4 S_5 S_6]

MODERN TRIGONOMETRY, by Nichols and Garland, (Holt, Rinehart and Winston); [S_6]

PRINCIPLES OF MATHEMATICS, by Allendoerfer and Oakly, (McGraw-Hill); [S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6]

SETS, RELATIONS AND FUNCTIONS, by McFadden, Moore and Smith, (McGraw-Hill); [S_2 S_3 S_4]

THE ELEMENTARY FUNCTIONS, by Fleenor, Shanks and Brumfiel, (Addison-Wesley); [S_4 S_5 S_6]

TRIGONOMETRIE, par Gauze et Hérès, (Beauchemin); [S_5]